

# THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES

PAR

**GENEVIÈVE GUITEL**

*Agrégée de l'Université*

---

1<sup>re</sup> THÈSE : FAMILLES DE TÉTRAÈDRES ET FIGURES APPARENTÉES

2<sup>e</sup> THÈSE : ANALYSE GRAPHIQUE DES DÉMONSTRATIONS

Soutenues le **25 MARS 1953** devant la Commission d'Examen

Président : M. R. GARNIER

Examineurs : M. BOULIGAND

M. JANET



CENTRE DE DOCUMENTATION UNIVERSITAIRE

TOURNIER & CONSTANS

5, Place de la Sorbonne, 5

PARIS-V<sup>e</sup>

1953



AU FIDELE AMI DES TETRAEDRES

A Monsieur Charles MORAZÉ

HOMMAGE DE TRES VIVE RECONNAISSANCE



Digitized by the Internet Archive  
in 2026

[https://archive.org/details/IA41552427\\_0034](https://archive.org/details/IA41552427_0034)

## INTRODUCTION

L'objet principal de cette étude est une classification des tétraèdres, classification qui s'inscrira dans le groupe des similitudes. Le départ de ce travail est extrêmement simple: nous ne retiendrons de chaque tétraèdre que les dièdres et les faces, sans utiliser leurs mesures, en nous contentant de les comparer seulement à l'angle droit.

Déjà, en géométrie plane, la comparaison du plus grand des angles d'un triangle avec l'angle droit suffit pour prévoir comment se placent les pieds de ses hauteurs relativement aux côtés ou la position du centre du cercle circonscrit au triangle relativement au triangle. Etendre ces résultats aux tétraèdres est l'un des buts que nous proposons. La comparaison systématique des éléments d'un tétraèdre avec l'angle droit aura du reste assez d'intérêt pour que nous l'étudions pour elle-même et que nous l'étendions à d'autres figures géométriques.

Partant des tétraèdres peut-être n'aurions-nous pas réussi à recenser complètement tous les cas possibles tant la question est complexe, mais pour montrer qu'un très classique problème de géométrie élémentaire n'avait pas toujours de solution (1), nous avons d'abord classé les trièdres et les tétraèdres orthocentriques. Il n'y a que deux formes de tétraèdres orthocentriques; mais, comment apprécier la simplicité du résultat à moins de le comparer à une classification des tétraèdres quelconques? C'est par ce biais que nous avons dû attaquer le problème principal dont la difficulté s'est trouvée réduite grâce à la classification des trièdres.

Celle-ci est donc le premier chapitre de notre étude. Nous démontrons qu'il suffit de connaître le nombre total des éléments obtus d'un trièdre pour déterminer sa forme, ce que nous proposons d'appeler son genre (2). Déjà la simplicité de ce résultat est remarquable; à un genre donné correspond une architecture parfaitement déterminée du trièdre relativement à la disposition de ses éléments obtus. Un trièdre ayant 6 éléments obtus, dièdres et faces, il n'y a dans ces conditions, que 7 genres possibles; ils sont tous réalisables: un trièdre peut donc être de genre 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. La simplicité des résultats trouvés permet de montrer qu'on peut passer du genre 0 au genre 6 par une chaîne linéaire, comportant des trièdres de tous genres et en ajoutant chaque fois un élément obtus et un seul à ceux du trièdre précédent.

Montrons qu'une telle classification suggère l'étude de problèmes nouveaux et oriente même leur recherche. La somme des genres de deux

---

(1) Concours général Classe de Première 1923 (2ème partie) - Repris partiellement Strasbourg juin 1931 A, A', B.

(2) Glossaire

trièdres supplémentaires est égale à 6 puisque les éléments obtus et aigus s'échangent. Il en résulte qu'un trièdre de genre 3 a un trièdre supplémentaire de genre 3, ce qui suggère de chercher si un trièdre, non trirectangle, peut être égal à son trièdre supplémentaire. Etant de genre 3 le trièdre donné aura obligatoirement deux faces obtuses et un dièdre obtus. Si on désigne ses faces par  $a, b, c$  ( $a > b > c$ ) on démontrera qu'il répond à la question si on prend  $c = \pi - a$  et  $b$  tel que  $\cotg \frac{b}{2} = \sin a$

Le problème a donc une infinité de solutions: tout angle obtus peut convenir pour  $a$ .

La classification des trièdres conduit à celle des parallélépipèdes. Il n'existe que trois genres de parallélépipèdes à cause du fait suivant: un parallélépipède matérialise en somme toutes les possibilités de trièdres incluses dans un trièdre donné quand on substitue à ses arêtes leurs prolongements, et ceci, pour une ou deux arêtes.

Le chapitre II aborde la classification des tétraèdres. Un premier examen fait penser que 29 genres de tétraèdres sont possibles, mais 27 seulement sont effectivement réalisables. Chacun sera accompagné d'une formule composée de 4 nombres, qui sont les genres des trièdres du tétraèdre.

Nous présentons ces 27 formes de tétraèdres à l'aide d'un tableau à double entrée schématisant d'une part les thèmes des faces et d'autre part les thèmes des dièdres (1). Certains thèmes sont féconds, d'autres ne le sont pas.

De cet ensemble impressionnant de genres nous avons dégagé l'ordre, qui n'était caché qu'en apparence. La figure de l'espace que nous appelons la résille généalogique des tétraèdres (1) et qui procède du continu linéaire, montre comment on peut passer du genre 0000 à n'importe quel autre genre, en ajoutant chaque fois un élément obtus et un seul, dièdre ou face, à chaque genre précédemment construit.

Là où une simple chaîne linéaire convenait pour les trièdres, un édifice assez compliqué convient seul pour les tétraèdres et, récompense inattendue, permet à toutes les formes précédemment caractérisées, d'en ajouter une nouvelle qui les réunit toutes, chacune se présentant sous l'aspect le plus abstrait, sous la forme d'un point! Cet édifice, d'apparence un peu insolite, qui se situe de manière déjà complexe dans la hiérarchie topologique, est devenu la base de toutes les applications que nous avons pu faire de la classification des tétraèdres et l'élément fondamental de la classification des angles tétraèdres. Dans cet esprit, la classification des tétraèdres est une classification naturelle. Pour y accéder il nous a suffi d'observer et de classer.

Malgré son apparence un peu inattendue la résille se présente assez facilement à partir des 6 tétraèdres n'ayant qu'un dièdre obtus et du tétraèdre de genre 4411. Ce dernier apparaît alors comme un

(1) Glossaire

pont entre les tétraèdres ayant deux dièdres obtus opposés et ceux qui ont deux dièdres obtus concourants. Son originalité de structure est remarquable, son importance dépasse celle du genre 0000, celui qu'on dessine toujours, et dont la seule originalité est de refuser tout élément obtus!

La classification des tétraèdres conduit à des applications qui font l'objet du chapitre III. L'une des plus importantes sera naturellement l'étude de la position du centre de la sphère circonscrite par rapport au tétraèdre. Dans 22 cas le centre est sûrement extérieur au tétraèdre, il ne lui sera sûrement intérieur que dans un cas, pour le genre IIII; il y a doute pour les 4 derniers cas. Une étude minutieuse montre que les deux possibilités sont réalisables dans chacun de ces quatre derniers cas.

La classification des tétraèdres est féconde dans une voie, à notre connaissance, nouvelle; il s'agit de la classification des angles tétraèdres, objet du chapitre IV.

Il faudra d'abord inventorier les diverses sortes d'angles tétraèdres. Les plus simples sont les angles tétraèdres convexes; on trouve ensuite ceux que nous appellerons les tétracanthes (1) et les tétracanthes inversés (1). Un tétracanth est un angle tétraèdre tel que la demi-droite opposée à l'une quelconque de ses arêtes soit intérieure au trièdre déterminé par les trois autres.

Si l'on considère maintenant un tétraèdre et les quinze régions de l'espace qu'il détermine, on peut imaginer un point variable duquel on mènera des perpendiculaires aux plans des faces du tétraèdre; cela posé, si le point est intérieur au tétraèdre l'angle tétraèdre correspondant est un tétracanth et réciproquement de sorte que, dans le groupe des similitudes, un tétracanth est la meilleure représentation qu'on puisse donner d'un tétraèdre.

Si le point considéré est situé à l'intérieur d'un trièdre tronqué ou d'un trièdre symétrique d'un des trièdres du tétraèdre on obtient un tétracanth inversé et enfin un angle tétraèdre convexe si le point est dans les combles; les réciproques sont vraies.

L'inventaire des formes des angles tétraèdres se fera donc à partir du tétraèdre. Chaque tétraèdre permet de construire un tétracanth, 3 angles tétraèdres convexes, 4 tétracanthes inversés. Il y a 27 formes de tétracanthes mais seulement 67 formes d'angles tétraèdres convexes au lieu de 81, et 78 formes de tétracanthes inversés au lieu de 108. Ceci est dû au fait que si un tétraèdre peut présenter un plan de symétrie ou un axes binaire (application étudiée au chap. III) le nombre des angles tétraèdres convexes et des tétracanthes inversés qu'il suscite se réduit immédiatement. On a donc la possibilité de contrôler les résultats précédemment acquis par cette voie indirecte.

L'unité profonde de cette étude, se révèle encore si l'on construit le tétracanth ayant pour sommet le centre de la sphère inscrite

---

(1) Glossaire

dans un tétraèdre. Le tétraèdre conjugué du tétraèdre initial par rapport à cette sphère aura sûrement le centre de sa sphère circonscrite intérieur, ce qui limite les possibilités de ses genres à 5. En géométrie plane il existe un théorème analogue mais généralement inaperçu.

Pour représenter les 67 genres d'angles tétraèdres convexes, les 78 genres de tétracanthés inversés il faudra utiliser trois résilles dans le premier cas, quatre dans le deuxième. Leurs points communs matérialiseront les symétries possibles du genre du tétraèdre qui occuperait la même place sur la résille.

Il y a 7 genres de trièdres, 67 genres d'angles tétraèdres convexe; l'existence de la quatrième arête suscite donc de nombreuses possibilités. Chaque genre aura une représentation symbolique bien caractérisée une position bien déterminée sur l'ensemble des résilles: les résultats sont précis, mais complexes. Seule la résille des tétraèdres pouvait faire apparaître l'harmonie cachée de l'ensemble.

La classification des tétraèdres semblait nous avoir donné tout ce que raisonnablement nous pouvions espérer d'elle. Il restait cependant à étudier les octaèdres déduits d'un tétraèdre en considérant les milieux de ses six arêtes. Ce sont des octaèdres particuliers, puisqu'ils ont un centre de symétrie, leur classification est pleine d'intérêt, mais difficile à établir. Elle sera caractérisée par trois angles tétraèdres convexes qui forment un trio où les trois partenaires sont étroitement liés.

Nous pensons que cette étude ne permettra pas seulement d'admirer la résille des tétraèdres, la variété des représentations symboliques des angles tétraèdres convexes, la richesse de tel thème de dièdres ou de faces; nous espérons aussi qu'elle clarifiera certains problèmes, qu'elle fera ressortir le caractère aventureux de quelques énoncés, qu'elle suggérera de nouvelles études; mais encore, que cet inventaire complet des formes du plus simple des polyèdres pourra donner une base rigoureuse à des travaux d'esthétique susceptibles de recevoir à la fois l'adhésion des savants et des artistes.

Il nous reste l'agréable devoir, en terminant cette introduction, d'exprimer notre gratitude à M. l'Inspecteur général THIBERGE qui, dès 1947, s'est intéressé à notre travail, pourtant bien loin d'être achevé, et qui nous a donné le courage de poursuivre cette recherche, déjà ancienne, et entreprise jusque-là dans le silence et la solitude.

Nous ne savons comment remercier MM. les Professeurs BOULIGAND et JANET. Nous leur devons d'avoir terminé ce travail dans les meilleures conditions de compréhension, de sympathie et de confiance. Ce sont eux qui nous ont conseillé de présenter ce mémoire pour une Thèse de Doctorat. Nous sommes en outre très sensibles à l'honneur qui nous est fait de voir paraître notre ouvrage dans l'une des collections que dirige M. BOULIGAND

Nous voulons enfin exprimer notre respectueuse reconnaissance à

M. le Professeur GARNIER qui a bien voulu être le Président du Jury et qui a eu la bonté de présenter une note à l'Académie des Sciences note pour laquelle il nous a donné les plus précieux conseils.

## CHAPITRE PREMIER

### I - TRIEDRES

Nous nous proposons dans ce qui va suivre de comparer à l'angle droit les trois faces d'un trièdre et au dièdre droit ses trois dièdres.

Nous présenterons le problème de la manière suivante: nous supposerons donnée et située dans le plan de la figure l'une des faces du trièdre et nous supposerons connue en outre la projection de la troisième arête sur le plan de la figure.

#### I - ETUDE DES FACES D'UN TRIEDRE

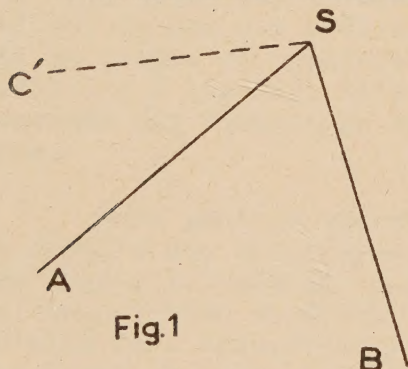


Fig.1

Rappelons les résultats classiques:  
soit un angle  $\alpha$  qui a un côté parallèle au plan de projection.

On sait que si  $\alpha$  est aigu sa projection  $\alpha'$  est un angle aigu plus petit, si  $\alpha$  est droit sa projection  $\alpha'$  est un angle droit; si  $\alpha$  est obtus sa projection  $\alpha'$  est un angle obtus plus grand.

Tous les cas possibles ayant été examinés et les conclusions étant toutes différentes les réciproques sont vraies. Ainsi dans la précédente figure comme  $\angle ASC'$  est aigu  $\angle ASC$  l'est aussi; au contraire  $\angle BSC'$  étant obtus  $\angle BSC$  le sera aussi, ceci prouve que le trièdre  $SABC$  a deux faces aiguës et une face obtuse.

On sera donc amené à dessiner deux figures suivant que  $\angle ASB$  est aigu ou obtus, puis dans chacune de ces figures on tracera les perpendiculaires à  $SA$  et à  $SB$  menées par le point  $S$ . Le plan se trouvera ainsi partagé en plusieurs régions et il sera très facile pour chacune de ces régions de déterminer la nature des faces du trièdre  $SABC$ .

Nous nous abstenons d'étudier le cas où  $\angle ASB$  serait droit afin de ne pas alourdir les résultats trouvés par des cas particuliers. Nous nous abstenons aussi de signaler explicitement les cas où les autres faces du trièdre deviendraient droites, ceci dans un souci de simplification.

#### 1°) $\angle ASB$ est un angle aigu

Examinons la nature des faces du trièdre  $SABC$  suivant que  $SC'$  se trouve dans les régions (1) (2) (3) (4) - Par raison de symétrie -

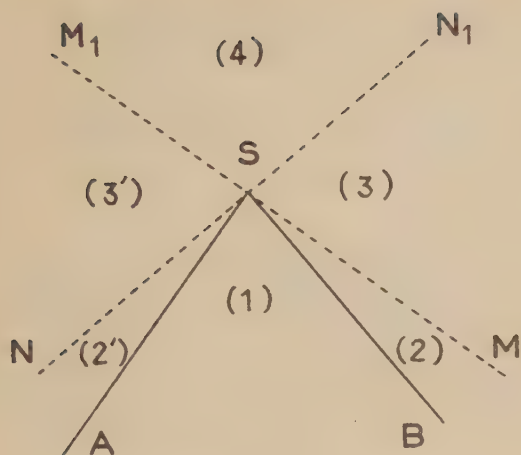


Fig. 2

2°) SC' est un angle obtus

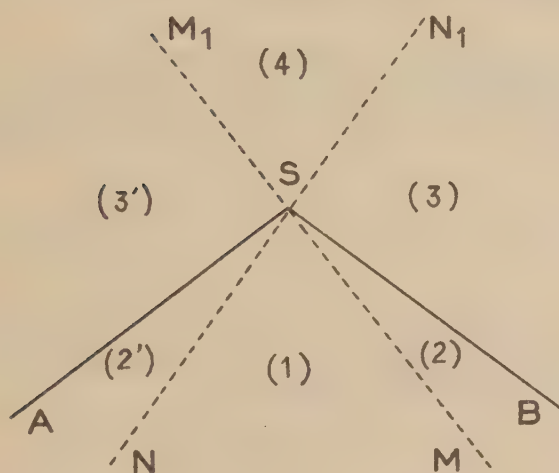


Fig. 3

## II - ETUDE DES DIEDRES D'UN TRIEDRE

1° - Commençons par examiner le cas des dièdres SA et SB. Je dis que la position de SC' par rapport à la figure formée par les droites qui portent SA et SB nous renseigne parfaitement sur la nature des dièdres SA et SB.

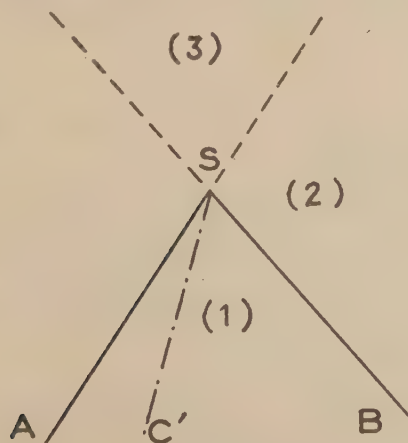


Fig. 4

trie les résultats obtenus pour la région (2) seront valables pour la région (2').....

Les résultats sont les suivants:

- régions (1) Le trièdre a ses trois faces aiguës
- région (2) le trièdre a ses trois faces aiguës
- régions (3) le trièdre a 2 faces aiguës et une face obtus
- régions (4) le trièdre a une face aiguë et deux faces obtuses.

Examinons la nature des faces du trièdre SABC suivant que SC' se trouve dans les régions (1) (2) (3) (4) ... Par raison de symétrie les résultats obtenus pour la région (2) seront valables pour la région (2').....

- région (1) le trièdre a 2 faces aiguës et une face obtuse.
- région (2) Le trièdre a 1 face aiguë et 2 faces obtuses
- région (3) a 1 face aiguë et 2 faces obtuses
- région (4) le trièdre a 3 faces obtuses.

Imaginons en effet qu'on mène par SA le plan perpendiculaire au plan ASB. Si SB et SC' sont situés d'un même côté par rapport à ce plan; c'est-à-dire si SB et SC' sont situés d'un même côté par rapport à la droite SA le dièdre SA est aigu; il est obtus dans le cas contraire. Même raisonnement pour le dièdre SB.

Ainsi sur la figure (4) :

Si SC' se trouve dans la région (1) les dièdres SA et SB sont aigus.



droite du plan  $CSC'$  est perpendiculaire à  $AB$ , le point  $I$  intersection de  $SC'$  et de  $AB$  est donc le pied d'une des hauteurs du triangle  $SAB$ .

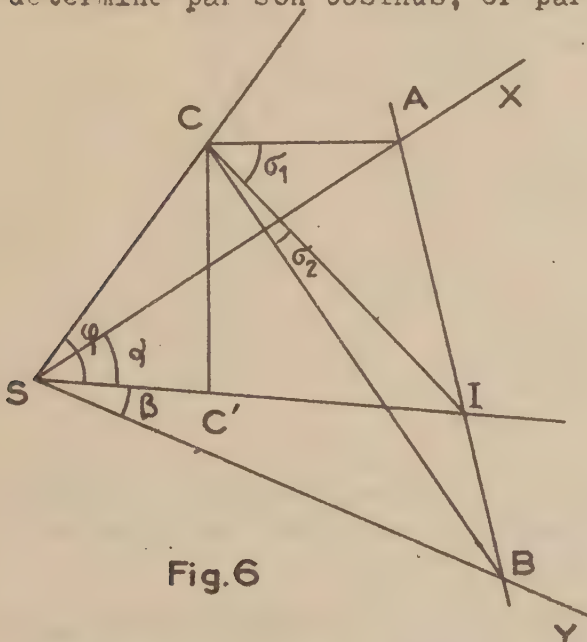
Ce raisonnement ne dépend pas de la position du point  $C$  sur la demi-droite  $C'L$ , il en résulte que  $AB$  reste parallèle à une direction fixe puisque  $SC'$  est donné à l'avance.

Nous avons supposé dès le début que l'angle  $ASB = c$  est aigu il en résulte que  $ASI = \alpha$  et  $BSI = \beta$  sont aussi des angles aigus. On est assuré, dans ce cas de figure que  $I$  est situé entre  $A$  et  $B$ ; d'après ce que nous venons de voir  $AB$  sera aisément déterminé dès que  $I$  sera connu, puisque  $AB$  est perpendiculaire à  $SC'$ . Inversement dès que  $C$  est connu  $I$  sera lui-même facile à déterminer puisque  $SCI$  est un triangle rectangle.

Le rectiligne du dièdre  $SC$  est l'angle  $BCA$  nous le désignerons par  $C$ ; sur la figure on peut le considérer comme la somme des angles  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ .

La variable sera l'angle  $C'SC$  que nous désignerons par  $\varphi$ ; nous nous proposerons de déterminer  $C$  en fonction de  $\varphi$  et des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$ .

On aurait pu évidemment se servir pour déterminer  $C$  de la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique;  $C$  se trouverait ainsi déterminé par son cosinus, or par la méthode que nous allons utiliser  $C$  sera déterminé par sa tangente et ceci plus simplement que par le cosinus.



On peut établir la formule:

$$\operatorname{tg} C = \frac{\sin \varphi (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)}{\sin^2 \varphi - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$\varphi$  variant de 0 à  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\sin \varphi$  croit de 0 à 1.

$\operatorname{tg} C$  est une fonction définie de  $\sin \varphi$  sauf lorsque

$\sin^2 \varphi = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta$ , s'il en est ainsi  $\operatorname{tg} C$  est infinie et comme l'angle  $C$  est un angle saillant  $C$  sera égal à  $\frac{\pi}{2}$ .

Montrons tout de suite que dans le cas présent cette circonstance peut se produire. Nous savons que  $\alpha$  et  $\beta$  sont aigus et que  $\alpha + \beta$  est aussi un angle aigu.

On a donc  $\alpha < \frac{\pi}{2} - \beta$  et par suite:

$$\operatorname{tg} \alpha < \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \beta \right); \text{ or } \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \beta \right)}$$

ce qui prouve que  $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta < 1$  et que  $\sin^2 \varphi$  peut être égal à  $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta$ .

Désignons par  $\varphi_0$  la valeur de  $\varphi$  telle que l'on ait:

$$\sin^2 \varphi_0 = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta$$

Etudions maintenant les variations de  $\operatorname{tg} C$ :

$$(\operatorname{tg} C)' = (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) \frac{(\sin^2 \varphi - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta) \cos \varphi - \sin \varphi \times 2 \sin \varphi \cos \varphi}{(\sin^2 \varphi - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta)^2}$$

$$(\operatorname{tg} C)' = \frac{(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) \cos \varphi [-\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta - \sin^2 \varphi]}{(\sin^2 \varphi - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta)^2}$$

$$(\operatorname{tg} C)' = - \frac{(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) (\sin^2 \varphi + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta) \cos \varphi}{(\sin^2 \varphi - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta)^2}$$

Le dénominateur de la dérivée quand  $\varphi$  croît de 0 à  $\frac{\pi}{2}$  est positif, il ne devient nul que pour  $\varphi = \varphi_0$ .

Comme  $\operatorname{tg} \alpha$  et  $\operatorname{tg} \beta$  sont positifs  $\sin^2 \varphi + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta$  est sûrement positif de sorte que  $(\operatorname{tg} C)'$  est constamment négatif.

On peut dresser un tableau de variations:

| $\varphi$                | 0                | $\varphi_0$                | $\frac{\pi}{2}$                  |
|--------------------------|------------------|----------------------------|----------------------------------|
| $\sin \varphi$           | 0                | $\sin \varphi_0$           | 1                                |
| $(\operatorname{tg} C)'$ | -                |                            | -                                |
| $\operatorname{tg} C$    | 0 $\searrow$     | $-\infty$ $\mid$ $+\infty$ | $\searrow$ $\operatorname{tg} C$ |
| $C$                      | $\pi$ $\searrow$ | $\frac{\pi}{2}$            | $\searrow$ $c$                   |

Dans les conditions que nous avons précisées plus haut l'angle  $C$  décroît donc constamment de  $\pi$  à  $c$  lorsque  $C$  décrit la demi-droite  $C'L$ .

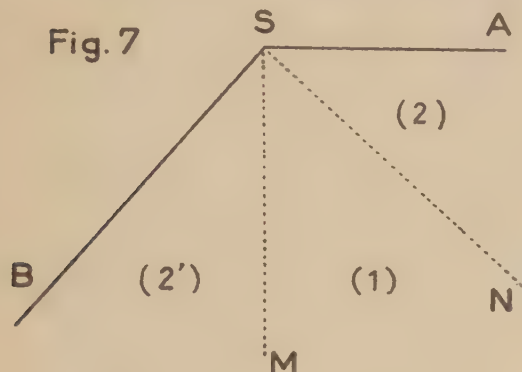
Remarquons que l'étude des variations de  $C$  paraît se compliquer un peu du fait que nous avons étudié les variations de  $\operatorname{tg} C$  qui devient discontinue lorsque  $C$  devient droit. Il semble que  $\sin C$  ou  $\cos C$  auraient pu être substitués à  $\operatorname{tg} C$ , en fait, il suffit de calculer ces deux quantités, leur forme irrationnelle montre que seule  $\operatorname{tg} C$  se présente vraiment avec simplicité.

Pour une raison qu'on comprendra plus loin nous réserverons pour plus tard l'étude du cas où  $SC'$  serait situé à l'extérieur de l'angle aigu  $ASB$ .

II° cas: l'angle ASB est obtus

Nous nous limiterons encore au cas où SC' est situé à l'intérieur de l'angle ASB.

Comme l'angle ASB est obtus les angles  $\alpha$  et  $\beta$  peuvent être aigus, droits, ou obtus.

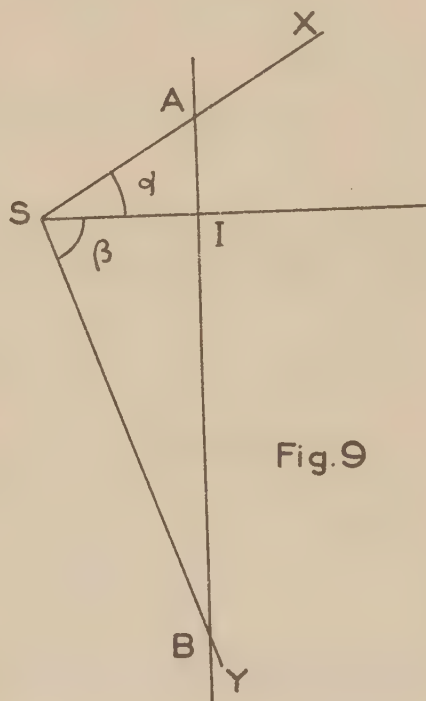
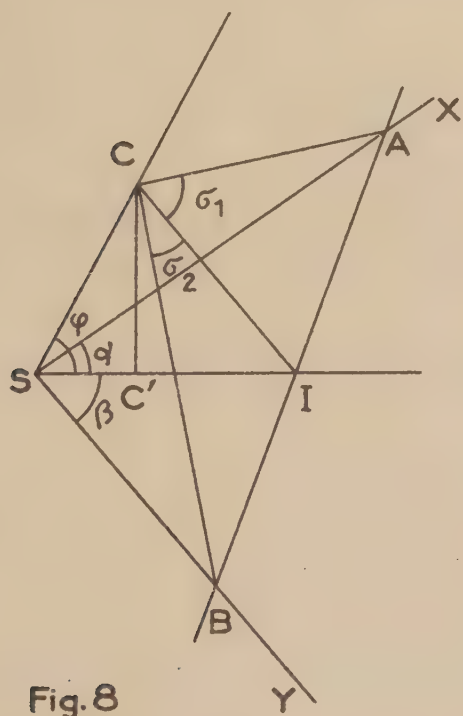


On mènera les demi-droites SM et SN à l'intérieur de l'angle ASB et toutes deux perpendiculaires l'une à SA l'autre à SB.

Si SC' est situé dans la région (I),  $\alpha$  et  $\beta$  seront tous deux aigus.

Si SC' est situé dans la région (2) ou dans la région (2') l'un des angles  $\alpha$  ou  $\beta$  sera obtus, l'autre sera aigu.

1°) SC' est situé dans la région (I) :  $\alpha$  et  $\beta$  sont aigus



Bien que ASB soit obtus les conditions seront les mêmes que précédemment parce que  $\alpha$  et  $\beta$  sont aigus. On démontrera, comme précédemment, que AB est perpendiculaire à SC' et que I est situé entre A et B; la formule trouvée plus haut pour tg C est donc toujours valable.

$$\operatorname{tg} C = \frac{\sin \varphi (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)}{\sin^2 \varphi - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

comme  $\alpha + \beta > \frac{\pi}{2}$

$$\alpha > \frac{\pi}{2} - \beta$$

Comme  $\alpha$  et  $\frac{\pi}{2} - \beta$  sont tous deux angles aigus

$$\operatorname{tg} \alpha > \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \beta \right)$$

$$\text{Or } \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha \cotg \left( \frac{\pi}{2} - \beta \right) = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \beta \right)}$$

ce qui prouve que  $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta > 1$

De sorte que  $\operatorname{tg} C$  est une fonction de  $\varphi$  qui ne peut jamais devenir infinie, il en résulte que  $C$  ne pourra jamais devenir droit.

Ce résultat important étant acquis étudions les variations de  $\operatorname{tg} C$

On a encore:

$$(\operatorname{tg} C)' = - \frac{(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) (\sin^2 \varphi + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta) \cos \varphi}{(\sin^2 \varphi - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta)^2}$$

Comme  $\operatorname{tg} \alpha$  et  $\operatorname{tg} \beta$  sont encore positifs on trouve comme précédemment que  $(\operatorname{tg} C)'$  est constamment négative

| $\varphi$                | 0     | $\frac{\pi}{2}$       |
|--------------------------|-------|-----------------------|
| $\sin \varphi$           | 0     | 1                     |
| $(\operatorname{tg} C)'$ |       | -                     |
| $\operatorname{tg} C$    | 0     | $\operatorname{tg} C$ |
| $C$                      | $\pi$ | c                     |

$C$  est donc constamment obtus et décroît de  $\pi$  à c

2°)  $SC'$  est situé dans la région (2) ou dans la région (2')

Pour fixer les idées supposons (fig.7) que  $SC'$  soit situé dans la région (2),  $\alpha$  sera donc aigu et  $\beta$  obtus.

On a  $\operatorname{tg} \alpha > 0$ ,  $\operatorname{tg} \beta < 0$

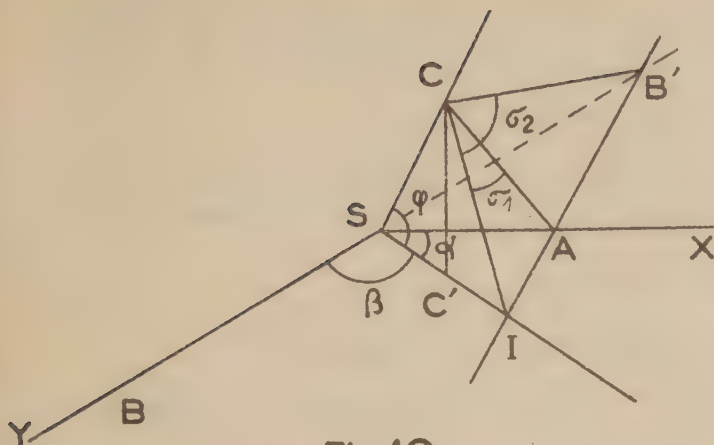


Fig. 10

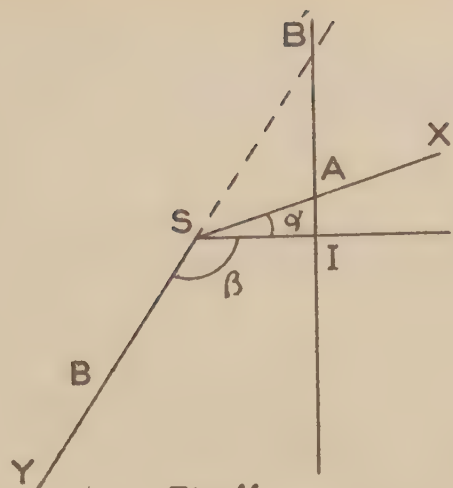


Fig. 11

La figure (11) montre que la perpendiculaire élevée en I à SI coupe la demi-droite SX en A et le prolongement de Sy en B'.

Le rectiligne du dièdre ASCB' est l'angle  $ACB' = \sigma_2 - \sigma_1$ . Nous voulons évaluer, non pas cet angle, mais le rectiligne du dièdre ASCB c'est-à-dire du supplément de l'angle précédent.

On montre que la formule établie dans le premier cas demeure toujours valable.

$$\operatorname{tg} C = \frac{\sin \varphi (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)}{\sin^2 \varphi - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

Mais cette fois  $\operatorname{tg} \beta < 0$  alors que  $\operatorname{tg} \alpha > 0$

Il en résulte que le dénominateur de cette fonction sera toujours positif; il ne sera jamais nul et, par suite C ne deviendra jamais droit.

Étudions maintenant le signe du numérateur. Il est facile de voir que  $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta$  est négatif. En effet:

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin (\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

Or  $0 < \alpha + \beta < \pi$

donc  $\sin (\alpha + \beta) > 0$

$\cos \alpha > 0$

$\cos \beta < 0$

$\operatorname{tg} C$  est donc toujours définie et toujours négative, par suite l'angle C est toujours obtus.

Le problème proposé est donc résolu dans ce cas particulier, mais nous étudierons quand même les variations de  $\operatorname{tg} C$  à cause d'un résultat inattendu qu'une étude superficielle aurait pu négliger.

$$(\operatorname{tg} C)' = - (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) \frac{(\sin^2 \varphi + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta) \cos \varphi}{(\sin^2 \varphi - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta)^2}$$

Le dénominateur de cette dérivée est positif; il ne peut s'annuler;  $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta$  est négatif comme nous venons de le prouver;  $\cos \varphi$  est positif, tout revient à étudier le signe de:

$$\sin^2 \varphi + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta$$

Comme  $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta < 0$  cette quantité est susceptible de s'annuler, tout revient à comparer la valeur absolue de  $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta$  au nombre 1.

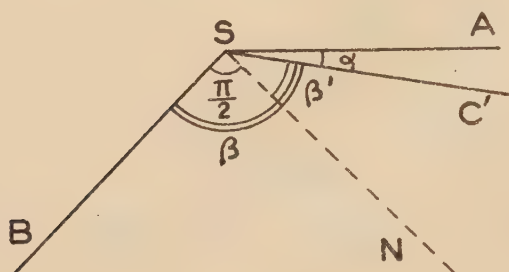


Fig.12

$$\text{Posons } \beta = \frac{\pi}{2} + \beta'$$

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} + \beta' \right)$$

$$= - \operatorname{tg} \alpha \cot \beta' = - \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta'}$$

$$\text{donc } |\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta| = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta'}, \text{ en effet } 0 < \beta' < \frac{\pi}{2}$$

Il y aura donc plusieurs cas à examiner.

1°  $\alpha > \beta'$ . Comme  $\alpha$  et  $\beta'$  sont deux angles aigus  $\operatorname{tg} \alpha > \operatorname{tg} \beta'$  ce qui prouve que  $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta'} > 1$  et que  $|\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta| > 1$

$\sin^2 \varphi + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta$  peut bien s'annuler mais pour une valeur qui ne convient pas pour un sinus.

Cette quantité sera donc négative et  $(\operatorname{tg} C)'$  également, par suite C est un angle obtus constamment décroissant.

Ce résultat ressemble beaucoup à celui que nous avons obtenu lorsque c est aigu:

| $\varphi$                | 0     | $\frac{\pi}{2}$                   |
|--------------------------|-------|-----------------------------------|
| $\sin \varphi$           | 0     | 1                                 |
| $(\operatorname{tg} C)'$ |       | -                                 |
| $\operatorname{tg} C$    | 0     | $\rightarrow \operatorname{tg} C$ |
| C                        | $\pi$ | $\rightarrow 0$                   |

$$2^\circ \alpha = \beta' \quad |\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta| = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta'} = 1$$

Ce cas est très peu différent du précédent.

$(\operatorname{tg} C)'$  est encore négative mais s'annule pour  $\varphi = \frac{\pi}{2}$

3°  $\alpha < \beta'$  Comme  $\alpha$  et  $\beta$  sont tous deux aigus on a:  $\operatorname{tg} \alpha < \operatorname{tg} \beta'$  ce qui prouve que  $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta'} < 1$  et que  $|\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta| < 1$

$\sin^2 \varphi + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta$  s'annule pour une valeur qui peut convenir pour un sinus, il existe donc un angle  $\varphi_1$  compris entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$  tel que :

$$\sin^2 \varphi_1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = 0$$

$$\sin^2 \varphi + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = \sin^2 \varphi - \sin^2 \varphi_1$$

$$= (\sin \varphi - \sin \varphi_1) (\sin \varphi + \sin \varphi_1)$$

Si donc  $\varphi < \varphi_1$   $\sin^2 \varphi + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta < 0$

$\varphi = \varphi_1$   $\sin^2 \varphi + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = 0$

$\varphi > \varphi_1$   $\sin^2 \varphi + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta > 0$

La dérivée de  $\operatorname{tg} C$  est donc d'abord négative, puis nulle et enfin positive, de sorte que  $\operatorname{tg} C$  est une fonction qui passe par un minimum pour  $\varphi = \varphi_1$  ce minimum est naturellement négatif.

| $\varphi$                | 0                               | $\varphi_1$      | $\frac{\pi}{2}$       |
|--------------------------|---------------------------------|------------------|-----------------------|
| $\sin \varphi$           | 0                               | $\sin \varphi_1$ | 1                     |
| $(\operatorname{tg} C)'$ | -                               | 0                | +                     |
| $\operatorname{tg} C$    | 0 $\searrow$ min $\nearrow$     |                  | $\operatorname{tg} c$ |
| $C$                      | $\pi$ $\searrow$ min $\nearrow$ |                  | $c$                   |

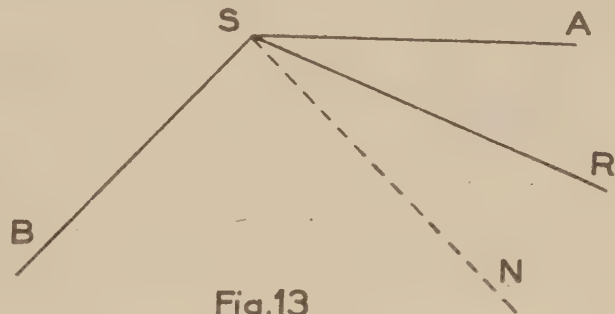


Fig.13

Dans ce dernier cas  $C$  n'est pas constamment une fonction décroissante de  $\varphi$ , ce résultat était tout à fait imprévisible.

Géométriquement il sera très facile de préciser dans quelle région du plan ASB la demi-droite  $SC'$  devra se trouver placée pour qu'il en soit ainsi.

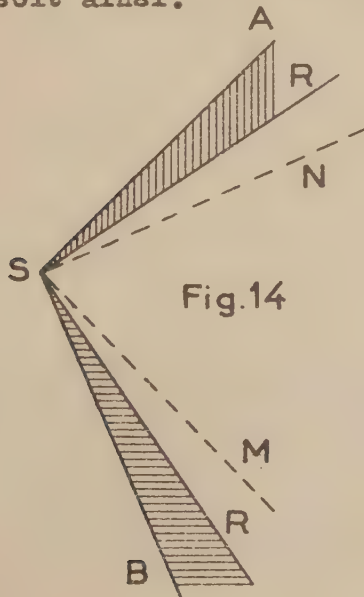


Fig.14

Nous avons déjà mené à l'intérieur de l'angle ASB la demi-droite SN perpendiculaire à SB. Traçons maintenant la bissectrice SR de l'angle ASN.

Si la demi-droite  $SC'$  se trouve à l'intérieur de l'angle ASR nous serons dans les conditions voulues pour que l'angle  $C$  passe par un minimum lorsque l'angle  $\varphi$  croitra de 0 à  $\frac{\pi}{2}$ .

Au contraire, si  $SC'$  est situé à l'intérieur de l'angle RSN, l'angle dé-

croîtra constamment lorsque  $\varphi$  croîtra de 0 à  $\frac{\pi}{2}$ .

Ces résultats doivent naturellement être étendus au cas où c'est l'angle  $\alpha$  qui devient obtus.

On voit donc sur la figure 14 que si  $SC'$  se trouve situé à l'intérieur de l'angle  $RSR'$ , le dièdre  $SC$  décroîtra constamment lorsque  $\varphi$  variera de 0 à  $\frac{\pi}{2}$ . Au contraire si  $SC'$  se trouve situé dans l'un ou l'autre des deux angles couverts de hachures le dièdre  $SC$  tout en restant constamment obtus passera par un minimum lorsque  $\varphi$  croîtra de 0 à  $\frac{\pi}{2}$ , ce minimum étant inférieur à  $c$  ceci prouve qu'il existe une valeur de  $\varphi$  pour laquelle  $C$  sera égal à  $c$ . Signalons que nous retrouverons ce résultat lors de la résolution d'un autre problème (1).

Revenons maintenant aux résultats acquis pour  $tgC$  dans les deux cas traités et montrons qu'ils suffisent à établir la solution du problème général.

I - Le dièdre  $SC$  s'appuie sur les cotés  $SA$  et  $SB$  de l'angle aigu  $ASB$  (fig.15).

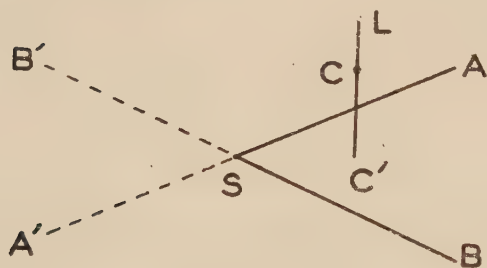


Fig.15

1°) Si  $C$  se projette en un point  $C'$  situé à l'intérieur de l'angle  $ASB$  nous savons que lorsque  $C$  décrit la demi-droite  $C'L$  le dièdre  $SC$  peut être obtus, droit ou aigu.

2°) Si  $SC$  se projette dans l'angle  $B'SA'$  opposé par le sommet de l'angle  $ASB$ , on peut considérer les deux dièdres d'arête  $SC$ , opposés par l'arête, et s'appuyant l'un sur

$SA$  et  $SB$ , l'autre sur  $SA'$  et  $SB'$ ; ils sont égaux, il en résulte que lorsque  $C$  décrit  $C'L$  dans ces nouvelles conditions, le dièdre  $SC$  décroît encore constamment. Il est d'abord obtus, puis droit et enfin aigu.

3°) Supposons maintenant que  $SC'$  soit situé à l'intérieur de l'angle  $A'SB$  et que le dièdre  $SC$  soit toujours le dièdre  $ASCB$ .

Nous avons démontré que le dièdre  $A'SCB$  est constamment obtus, quelle que soit la cote de  $C$ , donc le dièdre  $ASCB$  qui est le supplément du précédent sera constamment aigu.

On voit donc que si  $SC'$  est situé à l'intérieur de l'angle  $ASB$  ou de son opposé par le sommet le dièdre  $SC$  est obtus, droit ou aigu. Si  $SC'$  est situé en dehors de ces deux angles le dièdre  $SC$  est toujours aigu.

(1) Voir page 25. conditions pour qu'un trièdre soit égal à son propre trièdre supplémentaire.

De manière plus précise, supposons qu'on construise le cône de sommet  $S$  lieu géométrique des demi-droites  $SC_0$  telles que le dièdre  $SC_0$  soit droit, il résulte de la discussion précédente que si  $SC$  est située à l'intérieur de ce cône (les deux nappes étant supposées construites) le dièdre  $SC$  sera obtus, si  $SC$  est extérieure à ce cône le dièdre  $SC$  sera aigu.

## II - Considérons maintenant le cas du dièdre $SC$ s'appuyant sur l'angle obtus $BSA'$ :

En utilisant les résultats précédents on voit que si  $SC$  est extérieur au cône défini précédemment le dièdre est obtus et que si  $SC$  est intérieur à ce même cône le dièdre  $SC$  est aigu.

Ceci montre que si  $SC'$  est situé à l'intérieur de l'angle  $A'SB$  ou de son opposé par le sommet le dièdre  $A'SCB$  est obtus; au contraire si  $C'$  est situé à l'intérieur de l'un des deux angles aigus ce même dièdre, quand  $C$  décrit  $C'L$  commence d'être aigu, puis devient droit et finit par devenir et rester obtus.

Il ne nous reste plus qu'à construire rigoureusement ce cône, qui est défini par la relation  $\sin^2 \varphi = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  étant aigus; ces angles seront eux-mêmes variables mais leur somme sera naturellement constante et égale à  $c$ .

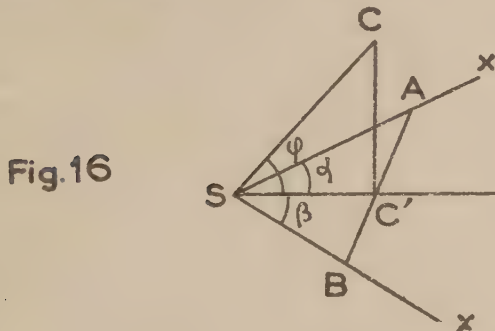


Fig. 16

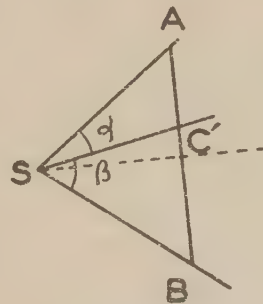


Fig. 17

Soit donc  $C'$  la projection de  $C$  sur le plan  $xSy$ , on sait que l'angle  $xSy = c$  est aigu et que  $C'$  est situé à l'intérieur de cet angle. Désignons encore par  $\alpha$  l'angle  $xSC'$  et par  $\beta$  l'angle  $ySC'$ , enfin par  $\varphi$  l'angle  $C'SC$ .

Nous supposons que  $\varphi$  est tel que:

$$\sin^2 \varphi = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta$$

et nous savons que s'il en est ainsi le dièdre  $SC$  est droit.

Par raison de symétrie nous mènerons  $AB$  perpendiculaire à la bissectrice de l'angle  $c$ , nous supposons donc que  $C'$  décrit le segment  $AB$ .

On peut démontrer que:

$$CC'^2 = -K^2 \overline{C'A} \cdot \overline{C'B} \quad \text{avec} \quad K^2 = \frac{\cos^2 \frac{C}{2}}{\cos^2 \frac{C}{2} - \sin^2 \frac{C}{2}}$$

Il résulte de cette relation que le lieu de C est une ellipse admettant AB pour petit axe puisque  $K^2 > 1$ .

Le lieu décrit par SC est donc un cône du second degré qui a S pour sommet et pour directrice une ellipse dont les axes sont définis dès qu'on se donne arbitrairement A B parallèle à la bissectrice extérieure de l'angle A S B.

L'étude de la nature des dièdres d'un trièdre ayant été entièrement traitée nous réunirons les résultats acquis dans deux figures:

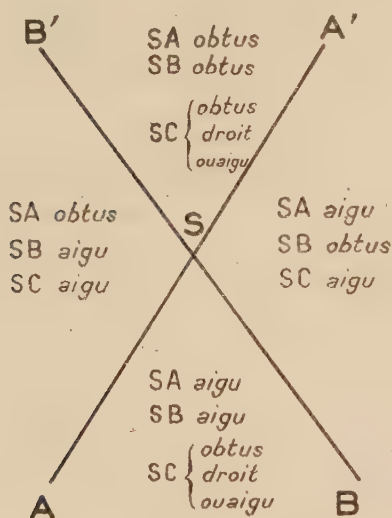


Fig. 18

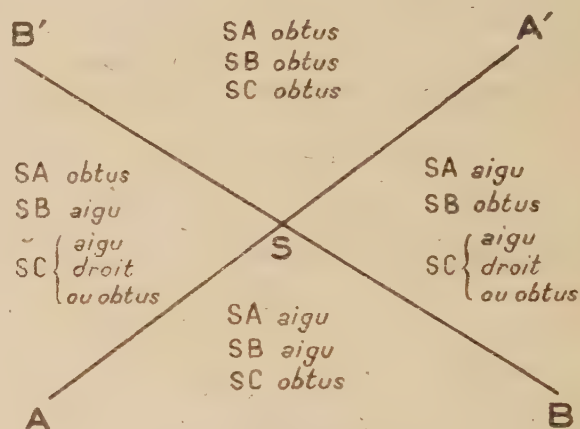


Fig 19

On pourrait maintenant superposer les figures 18 et 19 d'une part, 17 et 19 d'autre part et, suivant la région dans laquelle se trouverait SC', on saurait trouver la nature des éléments du trièdre SABC; nous préférons présenter les choses de manière plus systématique.

Tout d'abord remarquons que si un trièdre a n éléments obtus son trièdre supplémentaire en a 6-n, puisque les éléments obtus et aigus s'échangent.

Un trièdre ayant 6 éléments il nous suffira donc de savoir dans quelles conditions il peut avoir 0, 1, 2, 3, éléments obtus pour qu'on puisse étendre corrélativement ces résultats au cas où il a 4, 5 ou 6 éléments obtus.

Dans ce qui va suivre nous démontrerons que si on connaît le nombre total des éléments obtus d'un trièdre, on sait comment ce nombre se répartit entre ses dièdres et ses faces et qu'en outre la disposition mutuelle de ces éléments obtus est déterminée de manière unique.

Désignons maintenant par D un dièdre obtus, par F une face obtuse, marquons au-dessous du nombre désignant le nombre total d'éléments obtus d'un trièdre tous les cas possibles et discutons pour savoir ceux qu'on doit éliminer.

|                                |   |   |    |     |
|--------------------------------|---|---|----|-----|
| Nombre total d'éléments obtus: | 0 | 1 | 2  | 3   |
|                                |   | D | DD | DDD |
|                                |   | F | DF | DDF |
|                                |   |   | FF | DDF |
|                                |   |   |    | FFF |

1° - Supposons maintenant qu'un trièdre SABC ait au moins une face obtuse ASB: montrons qu'il a en outre, sûrement au moins un dièdre obtus. Soit toujours SC' la projection orthogonale de SC sur le plan ASB (voir fig.19).

Si l'on utilise les résultats trouvés dans la résolution du problème traité précédemment on sait que si SC' est intérieur à l'angle ASB le dièdre SC est sûrement obtus. Si SC' est extérieur à cet angle, l'un au moins des dièdres SA ou SB est obtus; on ne peut donc pas avoir comme seuls éléments obtus d'un trièdre: une face, deux faces ou trois faces. Dans le tableau que nous venons de dresser les mentions F, FF, FFF sont donc à barrer.

2° - Montrons maintenant qu'un trièdre ne peut avoir deux dièdres obtus sans avoir en outre, au moins, deux faces obtuses (voir fig. 18 et 19).

Soient SA et SB les deux dièdres obtus; le fait qu'ils sont obtus exige que SC' se trouve à l'intérieur de l'angle opposé par le sommet à l'angle ASB.

Si ASB est aigu il en résulte que ASC' est obtus ainsi que BSC' de sorte que les faces ASC et BSC sont obtuses. Si ASB est obtus l'une au moins des faces BSC et ASC est obtuse.

Le raisonnement serait le même si le trièdre possédait trois dièdres obtus.

Dans le tableau que nous venons de dresser les mentions DD, DDD, DDF sont à barrer, et le tableau se réduit ainsi:

|                                |   |   |    |     |
|--------------------------------|---|---|----|-----|
| Nombre total d'éléments obtus: | 0 | 1 | 2  | 3   |
|                                |   | D | DF | DDF |

Dans chaque cas subsiste donc une seule possibilité; nous allons montrer que chacune d'entre elles est effectivement réalisable. Pour bien mettre en évidence le caractère d'unicité des résultats obtenus nous appellerons désormais genre d'un trièdre (1) le nombre total de ses éléments obtus.

Les trièdres de genres 1,2,3 ont, nous venons de le voir, un seul

(1) Glossaire

dièdre obtus; nous pourrions nous donner la face ASB et supposer les dièdres SA et SB aigus, de sorte que SC' est sûrement intérieur à l'angle ASB. Si ASB est aigu on sait que le dièdre SC est aigu ou obtus: on peut donc construire ainsi un trièdre de genre 0 et un trièdre de genre 1. Si ASB est obtus on est sûr que le dièdre SC est obtus; en outre les deux faces ASC et BSC peuvent être aiguës ou l'une d'elles seulement est aiguë: on peut donc construire ainsi un trièdre de genre 2 et un trièdre de genre 3.

Si le trièdre est de genre 2, la face obtuse est opposée au dièdre obtus; s'il est de genre 3, au dièdre obtus est opposé la plus grande face, au plus petit dièdre la seule face aiguë.

Utilisant ensuite les propriétés corrélatives on voit qu'il existe 7 genres de trièdres que nous caractérisons dans le tableau suivant, qui est destiné à jouer un rôle important:

|                           |   |   |   |   |   |   |   |
|---------------------------|---|---|---|---|---|---|---|
| genre d'un trièdres :     | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Nombre de dièdres obtus : | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 |
| Nombre de faces obtuses : | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 |

Si un trièdre est de genre 4, aux dièdres obtus sont opposés les faces obtuses et au plus grand dièdre la plus grande face.

Si un trièdre est de genre 5, au plus petit dièdre est opposé la face aiguë.

Si donc le genre d'un trièdre est connu non seulement le nombre de ses dièdres obtus est déterminé, mais la disposition de ses éléments obtus dièdres et faces est aussi déterminée. On demeure frappé malgré la simplicité de ces résultats du grand nombre de possibilités offertes par la simple considération d'un trièdre. Il est naturel de les opposer à la simplicité des résultats obtenus en géométrie plane (triangles acutangles et triangles obtusangles) puisque cette classification des trièdres est naturellement une classification des triangles sphériques. Il importe de faire remarquer que deux trièdres symétriques ont même genre, ce qui, relativement à notre étude ne présentera aucun inconvénient. Deux triangles sphériques symétriques auraient aussi naturellement même genre.

Utilisons maintenant l'une des formules fondamentales de la trigonométrie sphérique. Désignons par a, b, c, les trois faces d'un trièdre, par A, B, C ses trois dièdres.

On a

$$\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b}$$

Comme a, b, c, sont des angles saillants  $\sin a$ ,  $\sin b$ ,  $\sin c$  sont trois quantités positives, le signe de  $\cos C$  est celui de  $\cos c - \cos a \cos b$ . Il en résulte que si l'on connaît les cosinus des faces d'un trièdre on est immédiatement en mesure de déterminer le genre de ce trièdre. Il

suffira de chercher les signes de:

$\cos a, \cos b, \cos c, \cos a - \cos b \cos c, \cos b - \cos c \cos a, \cos c - \cos a \cos b$

Si  $n$  de ces six quantités sont négatives le trièdre est de genre  $n$ .

L'assimilation d'un trièdre à un triangle sphérique nous a aussi donné l'idée de représenter symboliquement un trièdre en dessinant à l'intérieur d'un cercle de rayon quelconque trois rayons inclinés 2 à 2 à  $120^\circ$ . Ces trois rayons représentent les arêtes du trièdre et les trois arcs égaux ses trois faces. Nous conviendrons désormais que tout élément aigu, dièdre ou face, sera représenté par un trait fin et tout élément obtus, dièdre ou face, par un trait renforcé. La planche I, qui utilise cette représentation symbolique, est constituée par un tableau à double entrée qui caractérise chaque genre de trièdre par son thème de dièdres ou de faces(1).

L'examen attentif de la planche I nous permet d'énoncer les résultats suivants:

Théorème: Si un trièdre a ses trois dièdres aigus, il a ses trois faces aiguës.

Théorème corrélatif: Si un trièdre a ses trois faces obtuses il a ses trois dièdres obtus.

Théorème: Si un trièdre a une seule face obtuse il a un dièdre obtus et un seul.

Théorème corrélatif: Si un trièdre a deux dièdres obtus il a deux faces obtuses.

Les réciproques ne sont pas vraies.

Comme la classification des trièdres sera la base de la classification des tétraèdres nous résumerons les résultats obtenus dans deux figures. Dans la première la face ASB sera aiguë, elle sera obtuse dans la deuxième figure; la troisième arête SC sera variable et nous indiquerons suivant la région dans laquelle se trouve placé SC' quelles sont les possibilités de genres pour le trièdre SABC.

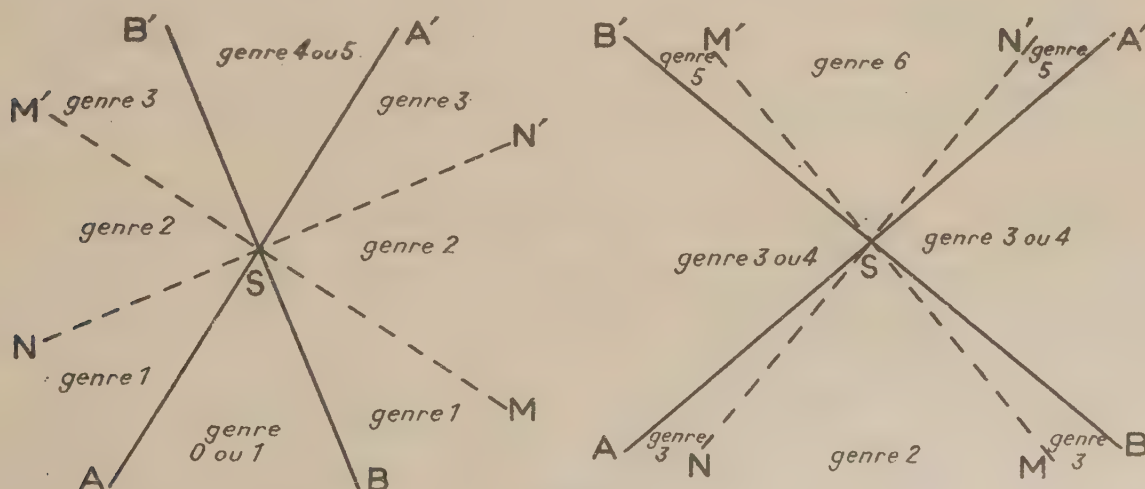


Fig. 20

(1) Glossaire.

# Classification des trièdres

Thèmes des dièdres →

Thèmes des faces ↓

|  |       |       |       |       |
|--|-------|-------|-------|-------|
|  |       |       |       |       |
|  | 0<br> | 1<br> |       |       |
|  |       | 2<br> |       |       |
|  |       | 3<br> | 4<br> | 5<br> |
|  |       |       |       | 6<br> |

Légende : Les rayons marqués en traits forts indiquent les dièdres obtus  
Les arcs marqués en traits forts indiquent les faces obtuses.

|                                      |   |   |   |   |   |   |   |
|--------------------------------------|---|---|---|---|---|---|---|
| genre d'un trièdre :                 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| N <sup>b</sup> re de dièdres obtus : | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 |
| N <sup>b</sup> re de faces obtuses : | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 |

Projections orthogonales de chaque arête d'un trièdre sur la face opposée.

Il est facile de voir que les positions des trois projections orthogonales de chaque arête d'un trièdre sur la face opposée ne dépendent que du nombre des dièdres obtus du trièdre et non de la nature de ses faces.

Nous utiliserons les résultats résumés sur la figure précédente et pour simplifier encore nous désignerons:

par i l'intérieur de l'angle ASB  
 par e l'intérieur des angles ASB' ou BSA'  
 par p l'intérieur de l'angle A'SB'

Les résultats sont les suivants:

genre 0 : i , i , i  
 genres 1,2,3: i , e , e  
 genre 4 : e , e , p  
 genre 5,6 : p , p , p

Nous utiliserons ces résultats ultérieurement quand nous étudierons la même question relativement aux tétraèdres.

Possibilité pour un trièdre d'avoir un plan de symétrie. Il suffit de regarder la planche I pour voir que seul un trièdre de genre 3 ne peut pas avoir de plan de symétrie. On peut même ajouter que seuls les trièdres de genres 0 et 6 peuvent avoir un axe ternaire.

Ces considérations de symétrie simplifieront plus tard l'étude des formes de tétraèdres.

Application: Nous avons vu précédemment que si un trièdre est de genre n, son trièdre supplémentaire est de genre 6-n, de sorte que seul un trièdre de genre 3 a un trièdre supplémentaire de genre égal. Cette simple remarque nous oriente vers la recherche du problème suivant:

Un trièdre, non trirectangle, peut-être être égal à son propre trièdre supplémentaire?

Donnons-nous un trièdre S de genre 3, désignons ses faces par a,b,c avec  $a > b > c$ ; et ses dièdres par A,B,C. Soit S' le trièdre supplémentaires de S.

| Trièdre S           |                     | Trièdre S'                |                           |
|---------------------|---------------------|---------------------------|---------------------------|
| faces               | Dièdres             | Faces                     | Dièdres                   |
| $a > \frac{\pi}{2}$ | $A > \frac{\pi}{2}$ | $\pi - A < \frac{\pi}{2}$ | $\pi - a < \frac{\pi}{2}$ |
| $b > \frac{\pi}{2}$ | $B < \frac{\pi}{2}$ | $\pi - B > \frac{\pi}{2}$ | $\pi - b < \frac{\pi}{2}$ |
| $c < \frac{\pi}{2}$ | $C < \frac{\pi}{2}$ | $\pi - C > \frac{\pi}{2}$ | $\pi - c > \frac{\pi}{2}$ |

L'égalité sera réalisée si l'on a

$$A = \pi - c ; \quad B = \pi - b ; \quad C = \pi - a$$

Utilisons maintenant les formules de la trigonométrie sphérique:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} \quad \text{avec } \cos A = -\cos c$$

$$\cos B = \frac{\cos b - \cos c \cos a}{\sin c \sin a} \quad \text{avec } \cos B = -\cos b$$

$$\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b} \quad \text{avec } \cos C = -\cos a$$

d'où

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c - \sin b \sin c \cos c & (1) \\ \cos b &= \cos c \cos a - \sin c \sin a \cos b & (2) \\ \cos c &= \cos a \cos b - \sin b \sin a \cos a & (3) \end{aligned}$$

On remarque que l'équation (2) ne contient pas  $\sin b$  ; on peut donc tirer  $\cos b$  de cette équation et porter sa valeur dans les équations (1) et (3) ce qui nous donnera deux expressions de  $\sin b$  :

$$\cos b = \frac{\cos a \cos c}{1 + \sin a \sin c}$$

Portant dans l'équation (1) on trouve:

$$\sin b = -\frac{\cos a (\sin a + \sin c)}{\cos c (1 + \sin a \sin c)} \quad \text{en supposant } \sin c \neq 0$$

Et de même portant dans l'équation (3):

$$\sin b = -\frac{\cos c (\sin a + \sin c)}{\cos a (1 + \sin a \sin c)}$$

Par suite:

$$\frac{\cos a (\sin a + \sin c)}{\cos c (1 + \sin a \sin c)} = \frac{\cos c (\sin a + \sin c)}{\cos a (1 + \sin a \sin c)}$$

Or  $\sin a + \sin c \neq 0$  et  $1 + \sin a \sin c \neq 0$  puisque  $\sin a > 0$  et que  $\sin c > 0$ ; la relation se simplifie beaucoup et devient:

$$\frac{\cos a}{\cos c} = \frac{\cos c}{\cos a} \quad \text{ou } \cos^2 a = \cos^2 c$$

Comme  $\cos a$  et  $\cos c$  sont de signes contraires on trouve

$$\cos a = -\cos c \quad \text{et par suite } \underline{a + c = \pi} \quad (4)$$

Portons ce résultat dans l'équation (2)

$$\cos b = -\cos^2 a - \cos b \sin^2 a$$

$$\text{ou } \cos b + 1 = \sin^2 a (1 - \cos b) \quad \text{ou encore } \sin^2 a = \cotg^2 \frac{b}{2}$$

$$\text{D'autre part } 0 < \frac{b}{2} < \frac{\pi}{2} \quad \text{et } 0 < a < \pi \quad \text{donc } \underline{\sin a = \cotg \frac{b}{2}} \quad (5)$$

Voici les conditions trouvées:  $a$  étant un angle obtus quelconque, si on choisit  $b < \pi$  tel que  $\cotg \frac{b}{2} = \sin a$  (relations qui implique  $b > \frac{\pi}{2}$ ) et  $c = \pi - a$ ;  $a, b, c$ , sont les trois faces d'un trièdre égal à son propre trièdre supplémentaire.

Calculons les dièdres de ce trièdre

$$\cos A = \frac{\cos a + \cos b \cos a}{\sin b \sin a} = \frac{\cos a (1 + \cos b)}{\sin a \sin b} = \frac{\cos a \cos \frac{b}{2}}{\sin a \sin \frac{b}{2}} = \cos a$$

si l'on tient compte de la relation (5)

Ce qui entraîne  $A = a$

$$\cos C = \frac{-\cos a - \cos a \cos b}{\sin a \sin b} = -\frac{\cos a (1 + \cos b)}{\sin a \sin b} = -\frac{\cos a \cos \frac{b}{2}}{\sin a \sin \frac{b}{2}} = \cos c$$

ce qui entraîne  $C = c$

Enfin

$$\cos B = \frac{\cos b + \cos^2 a}{\sin^2 a} = \frac{\cos b + 1 - \sin^2 a}{\sin^2 a} \quad \text{or} \quad \sin^2 a = \frac{1 + \cos b}{1 - \cos b}$$

On trouve  $1 + \cos B = 1 - \cos b$

ce qui entraîne  $B = \pi - b$

Le fait que  $B = \pi - b$  et que  $A = a$  montre que  $A > B$  donc  $a > b$ ; pour prouver qu'il s'agit d'un véritable trièdre il suffit de montrer que  $a + b + c < 2\pi$  et que  $a < b + c$ .

Puisque  $a + c = \pi$  et que  $b < \pi$  la première inégalité est vérifiée; la 2ème s'écrit:

$a < b + \pi - a$  ou  $a < \frac{b}{2} + \frac{\pi}{2}$  et comme  $a$  et  $\frac{b}{2} + \frac{\pi}{2}$  sont deux angles obtus  $\tg a < \tg (\frac{b}{2} + \frac{\pi}{2})$  et comme  $\cotg \frac{b}{2} = \sin a$ , l'inégalité devient:

$\tg a < -\sin a$ , résultat évident puisque  $0 < a < \pi$ ,

Il y a donc une infinité de trièdres, non trirectangles, égaux à leur propre trièdres supplémentaires. Il suffit de prendre pour les faces de ce trièdre:

$a$  obtus quelconque,  $c = \pi - a$ , et  $b$  tel que  $\cotg \frac{b}{2} = \sin a$

Les dièdres de ce trièdre sont  $a, c, \pi, -b$ . Ce résultat illustre le fait qu'un dièdre d'un trièdre peut avoir même mesure que la face qui lui est opposée. On peut du reste vérifier que si on projette orthogonalement l'arête  $SA$  sur la face  $BSC$ , la projection  $SA'$  fait avec  $SB$  ou avec

SC un angle inférieur à  $\frac{a}{2} - \frac{\pi}{4}$  conformément aux résultats trouvés précédemment (fig. 14).

## II - PARALLÉLEPIPEDES

Nous allons montrer que la classification des trièdres conduit à celle des parallélépipèdes.

Commençons par étudier les trièdres déduit d'un trièdre donné quand on prolonge une ou deux de ses arêtes.

Soit un trièdre quelconque  $SABC$ .

I - Prolongeons  $SA$  en  $SA'$  et étudions le trièdre  $SA'BC$ . Le dièdre  $SA'$  du nouveau trièdre est égal au dièdre  $SA$  et la face  $BSC$  est inaltérée, mais les quatre autres éléments du deuxième trièdre sont les suppléments des quatre éléments correspondants du premier trièdre.

La planche II représente symboliquement les 7 genres de trièdres; chaque arête est prolongée par une flèche et le nombre placé à côté de la flèche indique le genre du trièdre obtenu si cette arête et cette arête seulement a été prolongée.

Les résultats sont très simples pour les trièdres susceptibles d'avoir un axe ternaire, on devait s'y attendre; ils sont relativement simples pour ceux qui peuvent avoir un plan de symétrie; le seul cas un peu compliqué est celui du trièdre de genre 3. Il faut non seulement savoir si l'arête que l'on prolonge appartient à un dièdre obtus ou à un dièdre aigu; mais aussi, lorsqu'il s'agit d'un dièdre aigu, s'il est opposé à un face aiguë ou à une face obtuse.

II - Considérons à nouveau le même trièdre  $SABC$  et prolongeons deux arêtes  $SB$  et  $SC$ ; nous obtenons le trièdre  $SAB'C'$ ; on pourrait étudier directement les éléments de ce nouveau trièdre, c'est inutile. Il suffit de remarquer qu'il est symétrique du trièdre étudié précédemment  $SA'BC$  de sorte qu'il a même genre que ce trièdre.

Naturellement si l'on prolongeait les 3 arêtes du trièdre  $SABC$  on obtiendrait le trièdre symétrique de ce trièdre, ce qui à notre point de vue, ne donnerait rien de nouveau.

Il est maintenant facile d'étudier la classification des parallélépipèdes. Si, à partir d'un trièdre quelconque  $SABC$  on construit un parallélépipède ayant  $S$  pour l'un de ses sommets et  $SA$ ,  $SB$ ,  $SC$  comme support de trois arêtes on met en évidence les 7 trièdres qu'on peut déduire d'un trièdre donné en substituant successivement à 1, 2 ou 3 arêtes les prolongements de ces arêtes. Un parallélépipède matérialise en somme toutes les possibilités de trièdres incluses dans la considération de trois droites issues du même point et non situées dans un même plan.

En utilisant les résultats trouvés précédemment et résumés dans la planche II il est facile de voir qu'il n'existe que trois genres de

## II Trièdres déduits d'un trièdre donné quand on prolonge l'une de ses arêtes

|  |                                                                                                                                                                                          |
|--|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  | <p>0 Donne uniformément un trièdre de genre 4 pour les trois arêtes 4</p>                                                                                                                |
|  | <p>1 Par le dièdre obtus trièdre de genre 5<br/>Par les dièdres aigus trièdres de genre 3</p>                                                                                            |
|  | <p>2 Par le dièdre obtus trièdre de genre 6<br/>Par les dièdres aigus trièdres de genre 2</p>                                                                                            |
|  | <p>3 Par le dièdre obtus trièdre de genre 5<br/>Par le dièdre aigu, opposé à une face obtuse, trièdre de genre 3<br/>Par le dièdre aigu, opposé à une face aigue, trièdre de genre 1</p> |
|  | <p>4 Par les dièdres obtus trièdres de genre 4<br/>Par le dièdre aigu trièdre de genre 0</p>                                                                                             |
|  | <p>5 Par un dièdre obtus opposé à une face obtuse, trièdre de genre 3<br/>Par le dièdre obtus opposé à la face aigue, trièdre de genre 1</p>                                             |
|  | <p>6 Donne uniformément un trièdre de genre 2 pour les trois arêtes 2</p>                                                                                                                |

parallélépipèdes. Nous les représenterons à la fig. 21.

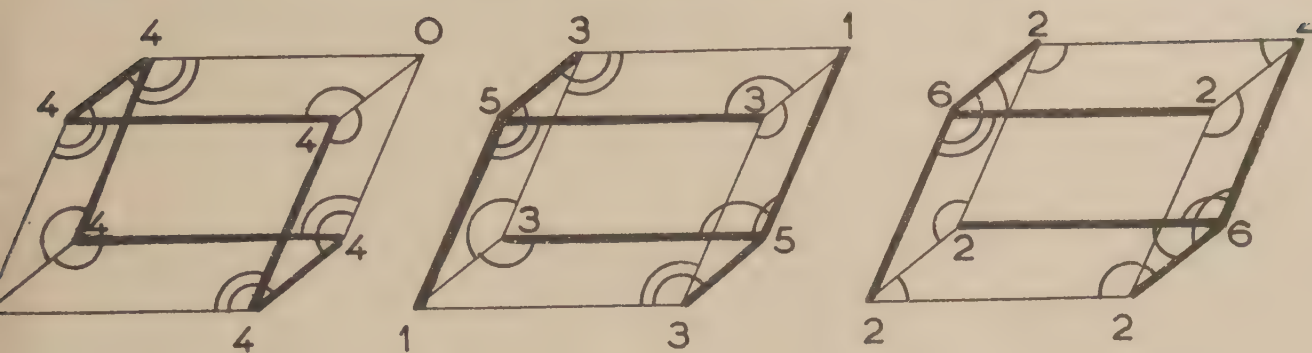


Fig. 21

Les traits renforcés marquent les dièdres obtus et les angles signalés par un arc de courbe sont obtus, sans que deux angles marqués du même signe soient nécessairement égaux.

Remarquons qu'un parallélépipède étant limité par 6 parallélogrammes et chacun d'entre eux possédant deux angles obtus le nombre total de faces (1) obtuses d'un parallélépipède est égal à 12. D'autre part un parallélépipède à 12 dièdres, deux à deux supplémentaires, de sorte que le nombre total de ses dièdres obtus est toujours 6. Il en résulte que le nombre total des éléments obtus d'un parallélépipède dièdres et faces est constant et égal à 18. Si nous considérons maintenant les genres des trièdres d'un parallélépipèdes, nous voyons que chaque dièdre obtus du parallélépipède est compté dans deux trièdres; il en résulte que la somme des genres des trièdres d'un parallélépipède est constante et égale à  $18 + 6 = 24$ . On le vérifie immédiatement sur la précédente figure. Nous ferons ultérieurement un usage important de cette remarque.

(1) Le mot face est pris dans le même sens que pour un trièdre



## CHAPITRE II

### I - TETRAEDRES

Nous venons d'établir une classification des trièdres; nous avons vu qu'il existe sept genre de trièdres et sept seulement, or, un tétraèdre comportant quatre trièdres, nous nous proposons de faire une classification des tétraèdres d'après les genres de leurs quatre trièdres.

En général le genre d'un tétraèdre sera défini par la connaissance des genres de ses quatre trièdres (1).

On sait qu'un tétraèdre étant limité par 4 triangles le nombre de ses faces obtuses ne peut dépasser 4 (2).

Nous allons montrer que le nombre des dièdres obtus d'un tétraèdre est aussi très limité.

Théorème: Un tétraèdre ne peut pas avoir plus de trois dièdres obtus.

Considérons un tétraèdre qui a un seul dièdre obtus, SA pour fixer les idées. Une seule arête du tétraèdre n'a aucun point commun avec SA c'est l'arête BC. Si donc le tétraèdre a deux dièdres obtus il n'y a que deux dispositions possibles.

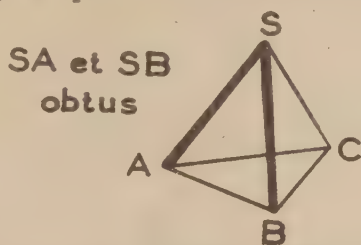
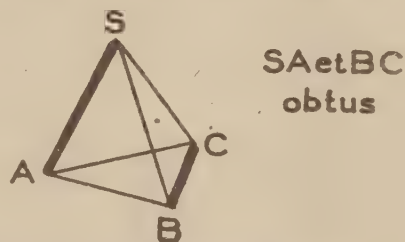


Fig. 22



Imaginons maintenant qu'un troisième dièdre puisse devenir obtus, la première des deux figures donnera les possibilités suivantes:

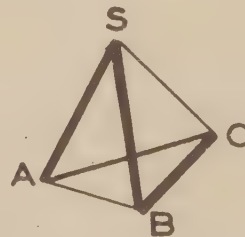
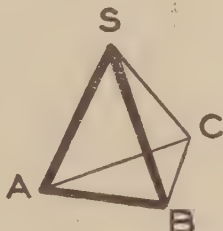
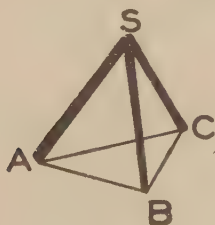


Fig. 23

(1) Glossaire

(2) Le mot face d'un tétraèdre est pris dans le sens de face pour un trièdre. S'il s'agissait d'un des triangles limitant le tétraèdre nous dirons qu'il s'agit d'une facette.

Il est facile de voir que ces trois dispositions sont les seules possibles. La combinaison SA, SB, AC obtus n'étant en effet pas distincte de la combinaison SA, SB, BC obtus.

Montrons que la combinaison SA, SB, AB obtus est irréalisable. En effet, s'il en était ainsi les trièdres S, A, B seraient au moins de genre 4 et par suite chacun d'eux aurait au moins deux faces obtuses, le tétraèdre aurait donc, au total, au moins six faces obtuses, ce qui est impossible.

Il ne subsiste donc que deux possibilités:

1° la combinaison SA, SB, SC obtus. Elle exige seulement que S soit de genre 5 ou 6 ce qui est certainement réalisable.

2° la combinaison SA, SB, BC obtus, ce qui implique que S et B sont au moins de genre 4. Nous verrons plus tard que cette combinaison peut être effectivement construite.

Partons maintenant de la deuxième partie de la figure 22, il est aisé de voir que si l'un des dièdres SB, SC, AB, AC devient obtus on retrouve le troisième dispositif de la figure 23.

Montrons enfin qu'un quatrième dièdre ne peut pas devenir obtus, les dispositions en triangles devant être exclues d'après une précédente démonstration il ne reste plus qu'une disposition représentée à la figure 24: les trièdres S, A, B, C seraient au moins de genre 4, ils auraient donc chacun au moins deux faces obtuses, de sorte que le tétraèdre aurait au moins 8 faces obtuses ce qui est impossible; ce cas doit donc être exclu.

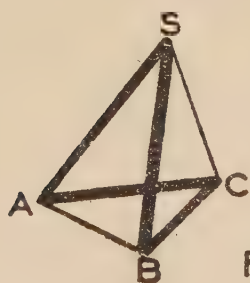


Fig. 24

Un tétraèdre ne peut donc pas avoir plus de trois dièdres obtus; s'il en est ainsi il n'y a que deux configurations possibles:

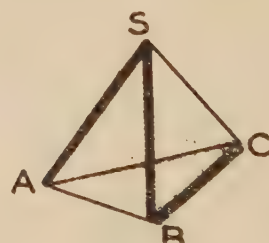
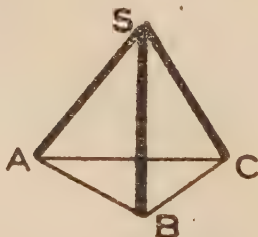


Fig. 25

Nous avons vu précédemment que si un tétraèdre a deux dièdres obtus il n'y a aussi que deux configurations possibles.

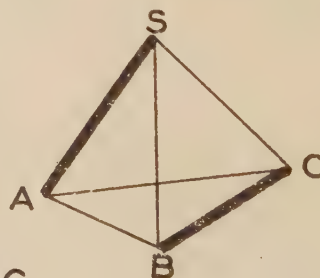
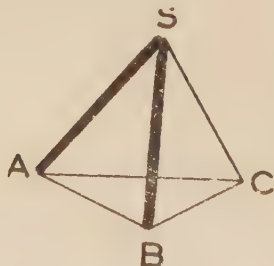


Fig. 26

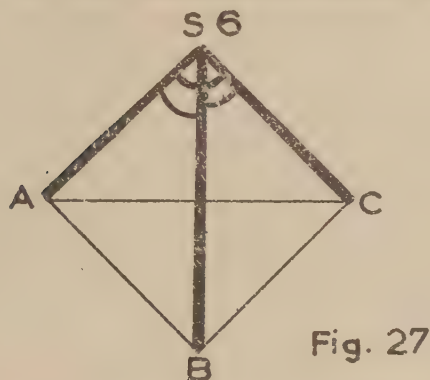
On peut donc en définitive envisager des tétraèdres r'ayant aucune dièdre obtus, des tétraèdres ayant un dièdre obtus; des tétraèdres ayant deux dièdres obtus concourants ou opposés; enfin des tétraèdres ayant trois dièdres obtus appartenant au même trièdre ou tels que deux trièdres du tétraèdre aient deux dièdres obtus, l'un des dièdres obtus étant commun à ces deux trièdres.

Au total six dispositions possibles pour les dièdres obtus d'un tétraèdre; nous verrons que ces dispositions possibles sont effectivement réalisables.

Nous allons maintenant utiliser les résultats trouvés relativement aux dièdres obtus et aux faces obtuses d'un tétraèdre, ainsi que les propriétés des genres des trièdres d'un tétraèdre, pour étudier le nombre et la disposition des éléments obtus d'un tétraèdre. Nous allons dresser ainsi une liste de tous les genres possibles de tétraèdres, il nous faudra ensuite nous assurer que ces formes prévues peuvent être effectivement construites.

### I - Le tétraèdre à trois dièdres obtus

Première configuration: Les trois dièdres obtus concourent en S; dans ces conditions le trièdre S est de genre 5 ou 6. Les trièdres A,B,C qui ont chacun un dièdre obtus ne peuvent être que des genres 1,2,3.

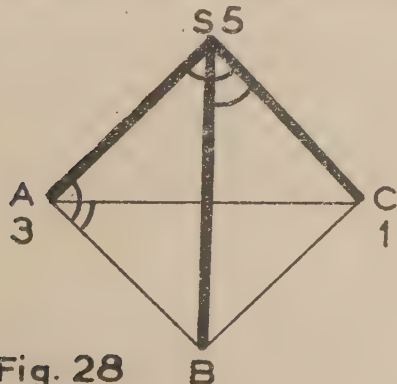


S est de genre 6: ce trièdre a donc trois faces obtuses (nous les marquerons symboliquement sur la figure par un arc de cercle) de sorte que seul l'un des trièdres A,B,C peut être de genre 2, les deux autres seront obligatoirement de genre 1 (fig.27).

Le trièdre S pouvant présenter un axe ternaire de symétrie les trois trièdres A,B,C jouent le même rôle par rapport au trièdre S de sorte qu'on est conduit seulement à 2 tétraèdres de genres:

6211  
6111

S est de genre 5: ce trièdre n'a que deux faces obtuses il y a donc encore deux possibilités de faces obtuses. D'autre part les trièdres A,B,C n'ayant qu'un dièdre obtus ne peuvent être que des genres 1,2,3.



Le trièdre S pouvant présenter un plan de symétrie, les trièdres A et B jouent le même rôle par rapport à lui, alors que C joue un rôle différent.

Supposons que A soit de genre 3, alors B et C seront obligatoirement de "genre 1. (fig.28)

Marquons les faces obtuses du trièdre A, la combinaison 5311 est prévisible et d'une seule manière. Supposons en effet que le trièdre C soit de genre 3, on aboutit à une impossibilité puisque déjà les triangles SAC et SBC sont obtusangles.

La combinaison 5311 n'est donc possible qu'avec une seule disposition, celle de la figure.

Supposons maintenant que l'un des trièdres A ou B soit de genre 2; ce sera le trièdre A pour fixer les idées. On voit immédiatement que ni B ni C ne peuvent en même temps être de genre 2, le triangle ABC ne pouvant avoir qu'un angle obtus.

On peut donc prévoir le genre: 5211.

Mais on doit supposer maintenant que le trièdre C est de genre 2; pour la même raison que précédemment les trièdres A et B seront de genre 1. On obtient de nouveau un tétraèdre de genre 5211 mais de disposition différente du précédent.

Nous conviendrons de désigner le premier par 5211' et le deuxième par 5211" (fig. 29)

Enfin il nous reste à examiner le cas où les trois trièdres A, B, C sont de genre 1. Nous obtenons le tétraèdre de genre 5111.

En résumé si le tétraèdre SABC possède trois dièdres obtus concourants nous pouvons prévoir les genres:

|      |       |                   |
|------|-------|-------------------|
| 6211 | 5311  | 6 genres au total |
| 6111 | 5211' |                   |
|      | 5211" |                   |
|      | 5111  |                   |

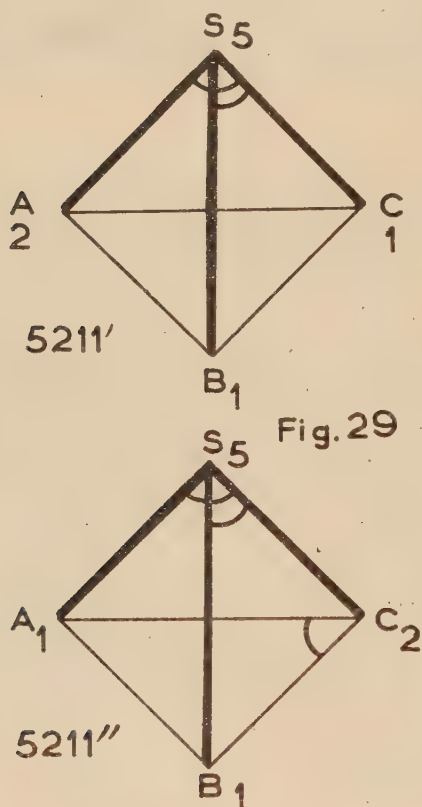


Fig. 29

Deuxième configuration: Le tétraèdre a 3 dièdres obtus deux à deux concourants.

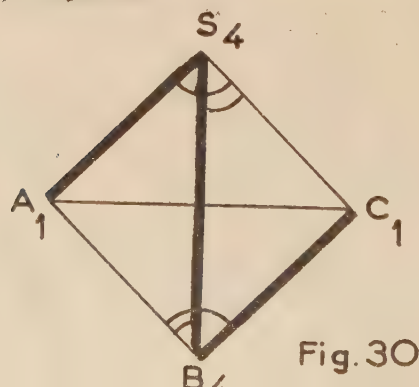


Fig. 30

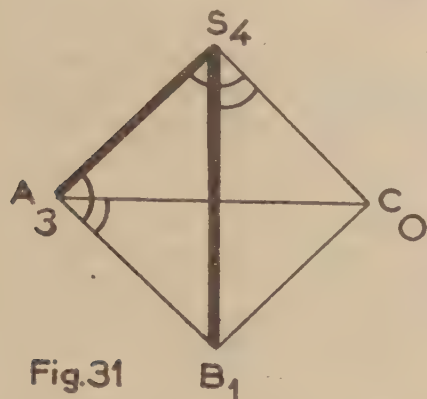
Ceci entraîne immédiatement que deux trièdres sont de genre 4. Les possibilités de faces obtuses sont satisfaites avec ces deux trièdres, les 2 autres sont donc obligatoirement de genre 1 (fig. 30). Il y a donc une seule possibilité

4411

## II = Le tétraèdre a deux dièdres obtus

### Première configuration: les deux dièdres obtus sont concourants:

Nous supposons que S est le trièdre qui a deux dièdres obtus concourants: S est obligatoirement de genre 4.



On voit aussi, sur la figure que C est de genre 0.

Les trièdres A et B jouent le même rôle par rapport au trièdre S qui peut avoir un plan de symétrie.

Les trièdres A et B peuvent être de genre 1,2,3. Seul l'un d'entre eux peut être de genre 3 (fig.31). On voit que A peut être de genre 3, d'une seule manière, B est alors de genre 1, ce qui donne le genre

4310

Supposons maintenant que le trièdre A soit de genre 2, ce qui est évidemment possible, B est encore de genre 1 sans quoi le triangle ABC aurait deux angles obtus. On trouve le genre:

4210

Enfin les deux trièdres A et B peuvent être tous deux de genre 1, ce qui donne le genre:

4110

En résumé si le tétraèdre SABC possède deux trièdres obtus concourants on trouve seulement trois possibilités:

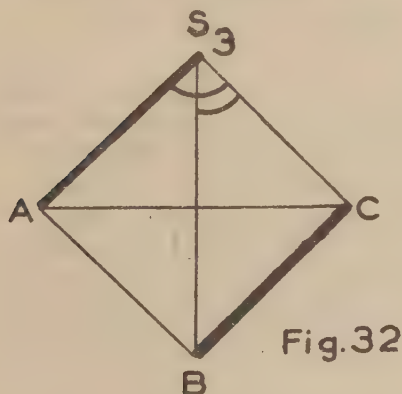
4310

4210

4110

3 genres au total

### Deuxième configuration: les deux dièdres obtus sont opposés



Les quatre trièdres du tétraèdre sont de genre 1,2,3.

Deux de ces quatre trièdres au plus seront de genre 3, les 2 autres seront alors obligatoirement de genre 1.

Supposons que S soit de genre 3; ceci implique obligatoirement que BSC est obtus et que l'une ou l'autre des faces ASB et ASC est obtuse, nous supposons désormais que ASC est obtus. Ce choix ne réduit pas la généralité des résultats que nous allons mettre en évidence.

Comme le trièdre  $S$  ne peut pas présenter de plan de symétrie les trièdres  $A, B, C$  jouent par rapport à  $S$  des rôles différents. On voit, et ceci allégera la discussion, que le trièdre  $C$  ne peut être que de genre 1, s'il était de genre 2 ou de genre 3 le triangle  $SAC$  aurait plus de 2 angles obtus (fig. 32).

Supposons que  $A$  soit aussi de genre 3, en marquant les faces obtuses de  $A$  on voit que ceci est possible et d'une seule manière, ce qui conduit au genre 3311.

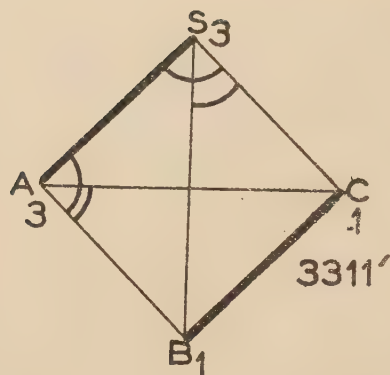
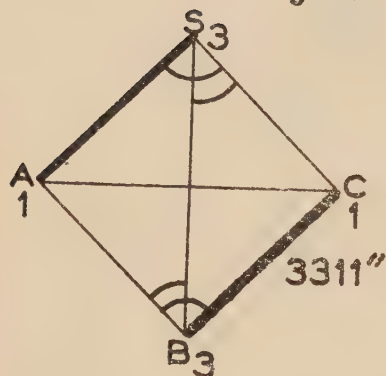


Fig. 33



Mais on peut aussi supposer que  $B$  est de genre 3, alors  $A$  sera de genre 1, on trouve de nouveau le genre 3311, avec une disposition différente du cas précédent. La première configuration, celle pour laquelle le dièdre commun aux deux trièdres de genre 3 est obtus, sera 3311'; l'autre, pour laquelle le dièdre commun aux deux trièdres de genre 3 est aigu sera désigné par 3311'' (fig. 33).

Supposons maintenant qu'un seul trièdre soit de genre 3 ce sera le trièdre  $S$  pour fixer les idées et avec la même disposition des faces obtuses que précédemment, alors nous savons que  $C$  est obligatoirement de genre 1.

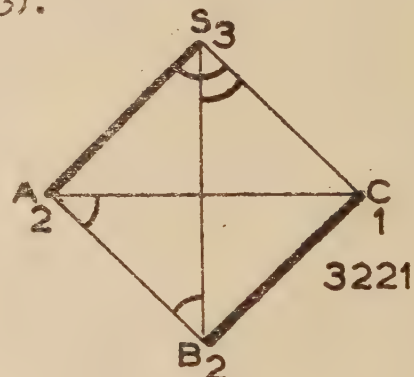


Fig. 34

Puisqu'un seul trièdre est de genre 3 deux autres trièdres au plus peuvent être de genre 2. On peut donc essayer la combinaison suivante:  $A$  et  $B$  sont de genre 2, puisque  $C$  est de genre 1 (fig. 34). On trouve le genre 3221.

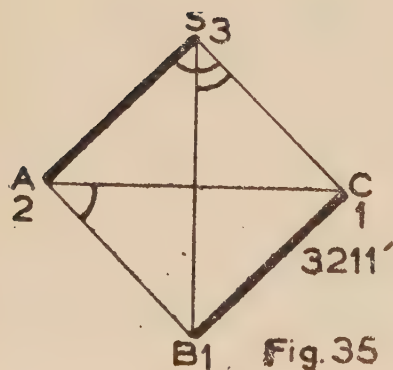
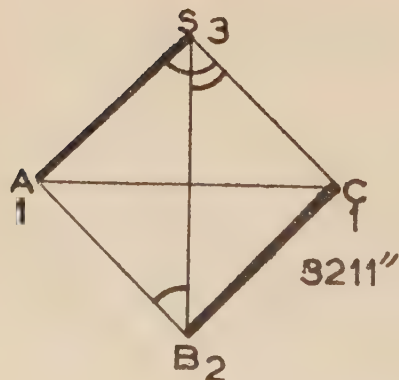


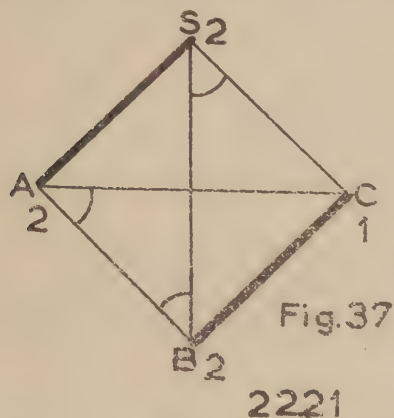
Fig. 35



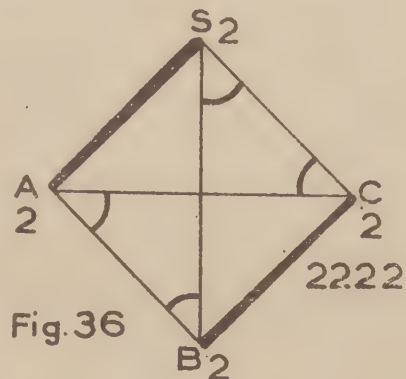
Supposons encore que  $S$  soit de genre 3, mais maintenant un seul trièdre sera de genre 2, ce sera forcément  $A$  ou  $B$  d'après ce qui précède. Comme ils ne jouent pas le même rôle par rapport à  $S$ , ceci nous donne deux possibilités. Nous désignerons par 3211' celle dans laquelle le dièdre commun aux trièdres 3 et 2 est obtus et par 3211'' celle dans laquelle le dièdre commun aux trièdres 3 et 2 est aigu (fig. 35).

Il nous reste à examiner la possibilité d'un trièdre de genre 3 les autres étant de genre 1; possibilité qu'on peut envisager:

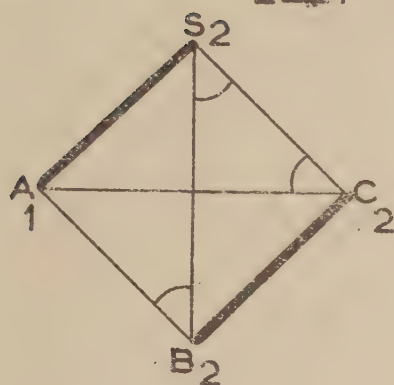
Nous avons épuisé toutes les possibilités pour lesquelles un trièdre au moins est de genre 3; il nous reste à examiner les possibilités fournies par les seuls genre 2 et 1.



On peut d'abord prévoir un genre 2222 (fig. 36).



Etudions maintenant les possibilités de S soit 2, dans ces conditions par suite des possibilités de symétrie de S on voit que relativement à S, B et C jouent le même rôle, il n'y a donc que deux cas à envisager. C est de genre 1 ou A est de genre 1.

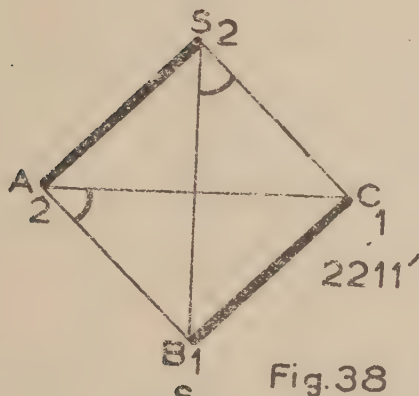


On constate en examinant la figure qu'il s'agit de la même forme de tétraèdre, on trouve donc un seul genre 2221 (fig. 37).

Etudions maintenant les possibilités de genre 2211.

Supposons que S soit de genre 2. Comme B et C jouent le même rôle par rapport à S il n'y aura que 2 cas à examiner.

A peut être de genre 2, ou bien B est de genre 2.

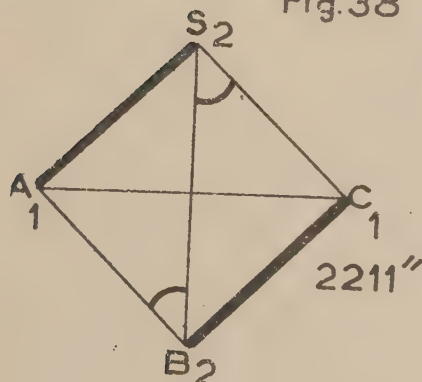


Nous désignerons par 2211' la première configuration, celle pour laquelle le dièdre commun aux deux trièdres de genre 2 est obtus et par 2211'' la configuration, pour laquelle le dièdre commun aux deux trièdres de genre 2 est aigu (fig. 38).

On peut encore prévoir un tétraèdre de genre 2111 et un tétraèdre de genre 1111.

En résumé les tétraèdres présentant deux dièdres obtus opposés présentent les possibilités suivantes:

....



|       |       |                    |
|-------|-------|--------------------|
| 3311' | 2222  |                    |
| 3311" | 2221  |                    |
| 3221  | 2211' |                    |
| 3211' | 2211" | 12 genres au total |
| 3211" | 2111  |                    |
| 3111  | 1111  |                    |

### III - Le tétraèdre a 1 seul dièdre obtus

On voit immédiatement que 2 de ses trièdres sont de genre 0, ce seront B et C pour fixer les idées; les deux autres trièdres S et A seront de genre 3,2,1. On trouve immédiatement 6 possibilités

|      |      |
|------|------|
| 3300 | 2200 |
| 3200 | 2100 |
| 3100 | 1100 |

Enfin le tétraèdre peut n'avoir aucun dièdre obtus, il est alors de genre 0000.

Résumons les résultats acquis par ces prévisions; nous trouvons 29 possibilités

|                    |   |                                |   |       |           |
|--------------------|---|--------------------------------|---|-------|-----------|
| 3 dièdres<br>obtus | { | 1 <sup>re</sup> configuration  | { | 6211  | 6 formes  |
|                    |   |                                |   | 6111  |           |
|                    |   |                                |   | 5311  |           |
|                    |   |                                |   | 5211' |           |
|                    |   |                                |   | 5211" |           |
|                    |   |                                |   | 5111  |           |
|                    |   | 2° configuration               |   | 4411  | 1 forme   |
| 2 dièdres<br>obtus | { | 2 dièdres obtus<br>concourants | { | 4310  | 3 formes  |
|                    |   |                                |   | 4210  |           |
|                    |   |                                |   | 4110  |           |
|                    |   | 2 dièdres obtus<br>opposés     | { | 3311' | 12 formes |
|                    |   |                                |   | 3311" |           |
|                    |   |                                |   | 3221  |           |
|                    |   |                                |   | 3211' |           |
|                    |   |                                |   | 3211" |           |
|                    |   |                                |   | 3111  |           |
|                    |   |                                |   | 2222  |           |
| 2221               |   |                                |   |       |           |
| 2211'              |   |                                |   |       |           |
| 2211"              |   |                                |   |       |           |
| 2111               |   |                                |   |       |           |
| 1111               |   |                                |   |       |           |

|                |                                                                                             |          |
|----------------|---------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| 1 dièdre obtus | $\left\{ \begin{array}{l} 3300 \\ 3200 \\ 3100 \\ 2200 \\ 2100 \\ 1100 \end{array} \right.$ | 6 formes |
| 0 dièdre obtus | 0000                                                                                        | 1 forme  |

Nous démontrerons ultérieurement que 27 sur 29 de ces possibilités existent effectivement. En effet, nous prouverons que les tétraèdres de genres 2222 et 5211" ne peuvent être construits.

Nous déterminerons maintenant les genres des tétraèdres qui peuvent être effectivement construits de la manière suivante: nous supposons connue l'une des faces du tétraèdre, le triangle ABC; nous placerons ce triangle dans le plan de la figure; nous nous donnerons en outre la projection  $s$  de  $S$  sur le plan de la figure.

Le trièdre  $S$  joue, bien évidemment, un tout autre rôle que les trièdres  $A, B, C$ . La précédente étude a montré que la connaissance de  $s$  entraîne immédiatement la connaissance de la nature des faces de chacun des trièdres  $A, B, C$ , mais la connaissance de  $s$  ne suffit pas à déterminer la nature des dièdres  $SA, SB, SC$  alors qu'elle permet de déterminer la nature des dièdres  $AB, AC, BC$ . Ceci nous incite à étudier d'abord la nature des éléments du trièdre  $S$ .

#### Etude des faces du trièdre $S$

Considérons l'une quelconque des faces de ce trièdre, la face  $ASB$ , pour fixer les idées.

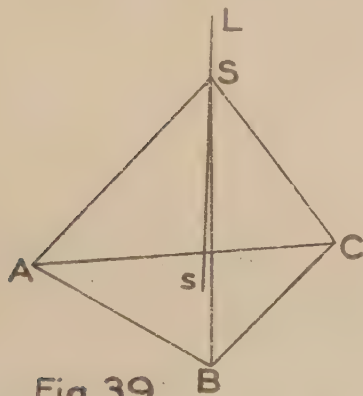


Fig. 39

Dans le plan  $ASB$  l'angle  $ASB$  est aigu ou obtus suivant que  $S$  est extérieur ou intérieur au cercle de diamètre  $AB$ . Il en résulte que dans l'espace la sphère de diamètre  $AB$  divise l'espace en deux régions: la région intérieure pour laquelle  $ASB$  est obtus, la région extérieure pour laquelle  $ASB$  est aigu. Naturellement si  $S$  est situé sur cette même sphère  $ASB$  est droit.

Remarquons, et ceci nous servira beaucoup par la suite, que si  $S$  décrit la demi-droite  $sL$ , le fait de traverser la sphère de diamètre  $AB$  fait donc perdre au trièdre  $A$  un élément obtus. Dans ces conditions il suffira de connaître la nature des faces du trièdre aplati  $sABC$ ; ceci montrera combien il a à l'origine de faces obtuses, ces dernières étant destinées à devenir aiguës lorsque  $S$  traversera l'une des sphères construites sur  $AB, BC, CA$  comme diamètres.

Considérons à nouveau le triangle  $ABC$ ; nous tracerons les in-

tersections de ces trois sphères avec le plan de la figure; ce seront les cercles de diamètre  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$ . Nous voyons immédiatement que si  $s$  est intérieur à l'un de ces cercles on ne sait rien sur la nature de la face correspondante de sommet  $S$ , au contraire si  $s$  est extérieur à ce cercle la face correspondante est aiguë; en tout cas on connaît certainement la nature des faces du trièdre aplati  $sABC$ .

Ces sphères se coupent deux à deux, elles passent en effet par les pieds des hauteurs du triangle  $ABC$ , nous désignerons ces points par  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ .

Les sphères  $AB$  et  $AC$  se coupent suivant un cercle de diamètre  $AA'$  et situé dans le plan perpendiculaire au plan de la figure mené par  $A A'$ ; soit  $P$  ce plan.

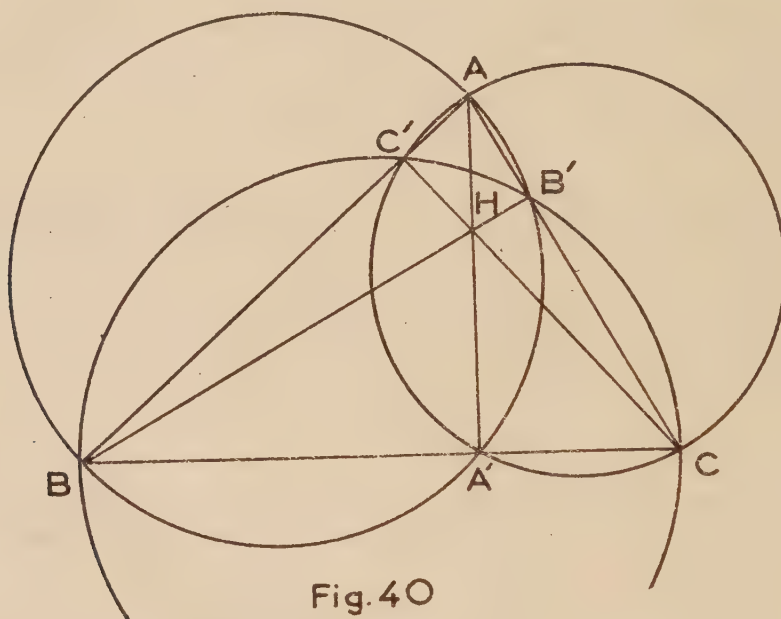


Fig.40

Supposons que le point  $S$  soit situé sur le cercle de diamètre  $AA'$ , précédemment défini; s'il en est ainsi le trièdre  $S$  a deux faces droites on sait qu'il en résulte qu'il a deux dièdres droits; nous nous servirons ultérieurement de cette remarque qui est très importante.

Tout ce que nous venons d'exposer est vrai que le triangle  $ABC$  soit acutangle ou obtusangle. Examinons dans quelles conditions le trièdre  $S$  peut devenir trirectangle.

#### 1° - Le triangle $ABC$ est acutangle (fig. 40)

Considérons l'intersection des trois sphères  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$ , par le plan  $P$  précédemment défini. On sait que les sphères  $AB$  et  $AC$  se coupent suivant le cercle de diamètre  $AA'$ , situé dans le plan  $P$ . La sphère

re BC coupe la droite  $AA'$  en deux points l'un situé entre A et  $A'$ , l'autre extérieur au segment  $AA'$  ce qui démontre qu'elle coupe le cercle de diamètre  $AA'$  en deux points symétriquement situés par rapport au plan de la figure. Pour cette position de S le trièdre S est trirectangle ; nous savons élémentairement que la projection de S sur le plan ABC est justement l'orthocentre du triangle ABC: H.

Si donc S décrit la demi-droite HL le trièdre S commence par avoir ses trois faces obtuses (il est donc de genre 6) ; elles deviennent droites en même temps pour le point S d'intersection des trois sphères ; au delà de S, les trois faces deviennent aiguës (le trièdre est donc de genre 1 ou 0).

## 2° - Le triangle ABC est obtusangle (A est l'angle obtus)

On démontre encore que les sphères AB et AC se coupent suivant le cercle de diamètre  $AA'$ , il suffit de construire la section de la figure de l'espace par le plan perpendiculaire au plan de la figure et de tracer  $AA'$  pour constater que la sphère BC ne peut pas couper le cercle de diamètre  $AA'$  (fig.41). Dans ces conditions le trièdre S ne peut devenir trirectangle ; il ne peut pas avoir plus de deux faces droites.

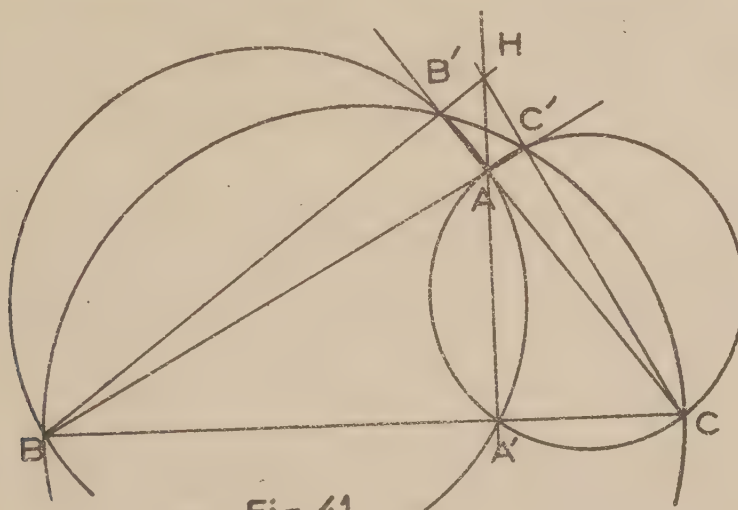


Fig.41

On sait que l'orthocentre du triangle ABC est extérieur au triangle ABC, il est donc aussi extérieur aux trois sphères ; il en résulte que si S décrit la demi-droite HL le trièdre aura constamment ses trois faces aiguës (il est donc de genre 1 ou 0).

## Etude des dièdres du trièdre S.

Cette étude est encore plus importante que la précédente puisqu'elle nous permettra non seulement de déterminer le genre du trièdre S mais aussi les genres des trièdres A,B,C.

Il nous suffira d'appliquer les résultats que nous avons trouvés précédemment en étudiant la nature des dièdres d'un trièdre.

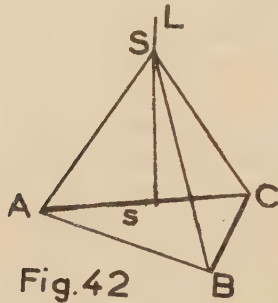


Fig. 42

Soit à étudier le dièdre SA, pour fixer les idées.

Si l'angle BAC est aigu nous savons qu'il existe un cône de sommet A admettant les droites AB et AC comme génératrices d'une même nappe et tel que, pour toute demi-droite SA intérieure à l'une des nappes de ce cône, le dièdre SA soit obtus alors que si SA est extérieur à ce cône le dièdre SA est aigu; enfin si SA est l'une des génératrices du cône le dièdre est droit. Il en résulte que S se déplaçant sur la demi-droite sL perpendiculaire au plan ABC le fait de traverser l'une des nappes du cône fait changer la nature du dièdre: il passe, dans ce cas de dièdre obtus à dièdre aigu; le trièdre S perd donc dans ces conditions l'un de ses éléments obtus et ceci comme dans le cas des faces, précédemment étudié.

Si l'angle BAC est obtus nous savons qu'il existe un cône de sommet A, admettant les droites AB et AC comme génératrices de deux nappes différentes et tel que pour toute demi-droite SA intérieure à l'une des nappes du cône le dièdre SA soit aigu alors que si SA est extérieure à ce cône le dièdre SA est obtus, enfin si SA est l'une des génératrices du cône le dièdre est droit.

Il en résulte que si S se déplace sur une demi-droite sL perpendiculaire au plan ABC le fait de traverser l'une des nappes du cône fait changer la nature du dièdre: il devient, dans ce cas, si l'on part du plan ABC, de dièdre aigu un dièdre obtus; le trièdre acquiert donc dans ces conditions un élément obtus de plus. Il faut signaler l'importance de ce fait que nous rencontrons pour la première fois.

La connaissance des dièdres du trièdre S exige donc la construction de trois cônes de sommets A, B, C comme la connaissance des faces de ce même trièdre exigeait la construction de trois sphères. Nous avons étudié les intersections de ces sphères et nous allons voir que cette étude facilite singulièrement l'étude de l'intersection de ces trois cônes et même leur construction.

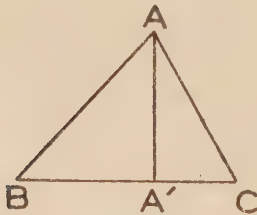


Fig. 43

Soit AA' la hauteur, relative au côté BC, du triangle ABC; les sphères de diamètres AB et AC se coupent suivant un cercle qui a pour diamètre AA' et dont le plan est perpendiculaire au plan de la figure. Soit I un point de ce cercle, le trièdre IABC a, comme nous le savons, deux faces droites; il en résulte qu'il a aussi deux dièdres droits; les dièdres BI et CI, ce qui prouve que BI et CI sont, la première, génératrice du cône de sommet B, la deuxième génératrice du cône du sommet C, par conséquent,

Il en résulte qu'il a aussi deux dièdres droits; les dièdres BI et CI, ce qui prouve que BI et CI sont, la première, génératrice du cône de sommet B, la deuxième génératrice du cône du sommet C, par conséquent,

comme I a été pris au hasard sur le cercle  $AA'$ , ceci prouve que les deux cônes de sommets B et C se coupent suivant le cercle de diamètre  $AA'$ .

On aurait donc pu se servir de cette remarque pour définir l'un et l'autre de ces deux cônes; de sorte que l'étude des éléments d'un tétraèdre allège singulièrement l'étude des éléments d'un dièdre et donne du problème assez ingrat traité précédemment une solution géométrique très élégante!

La connaissance de la nature des éléments du trièdre S exige donc simultanément la construction des trois sphères de diamètres AB, BC, CA et des trois cônes de sommets A, B, C s'appuyant sur les cercles de diamètres  $CC'$  et  $BB'$  pour le premier cône  $AA'$  et  $CC'$  pour le deuxième,  $BB'$  et  $AA'$  pour le troisième.

Si le triangle ABC était toujours un triangle acutangle le problème serait relativement aisé, car nous avons vu que si s désigne la projection de S sur le plan ABC le fait, partant de s et décrivant la demi-droite sL, de traverser l'une des trois sphères ou l'un des trois cônes fait perdre au trièdre un élément obtus. Nous savons que le trièdre est caractérisé si l'on connaît le nombre de ses éléments aigus ou obtus il suffirait donc d'examiner qu'elle est la nature du trièdre aplati  $sABC$  et d'étudier ce que devient ce trièdre lorsqu'il perd successivement un, deux .... éléments obtus.

Si, au contraire le triangle ABC devient obtusangle, lorsque S décrit la demi-droite sS le fait de traverser l'un des cônes (celui de sommet A si A est l'angle obtus ce que nous supposerons désormais) signifie que le trièdre change un élément aigu en un élément obtus, alors que pour les autres cônes et pour les trois sphères les traverser signifie qu'un élément obtus devient un élément aigu. On se rend compte que la connaissance des éléments du trièdre aplati  $sABC$ , bien qu'indispensable, ne suffise plus à rendre compte de ce qui se passera lorsque S décrira la demi-droite sL; il faudra donc trouver autre chose. Le plus simple nous paraît être de faire une coupe de la figure de l'espace par un plan perpendiculaire au plan ABC. Nous marquerons dans le plan ABC la trace du plan choisi et les points où cette trace rencontre les différents éléments de la figure, puis nous ferons une deuxième figure qui sera la coupe de la figure de l'espace précédente; en conservant les lettres marquées sur la première figure on aura un repère suffisant. On sait que la section plane de chaque sphère sera un cercle et que le centre de ce cercle sera justement situé sur la trace du plan de la figure. Comme les cônes sont des cônes du second degré leurs sections planes seront suivant les cas une ellipse, une hyperbole, une parabole. Nous nous efforcerons de choisir cette section de la figure de l'espace aussi simplement que possible; nous serons très aidés dans la construction des courbes obtenues en nous souvenant que si deux des cercles obtenus sont sécants deux sections de cônes doivent passer par le point commun.

Soit un triangle obtusangle ABC (A est l'angle obtus). Faisons

# III

Genres des trièdres  $S$  dont les arêtes passent par 3 points donnés

$A, B, C.$

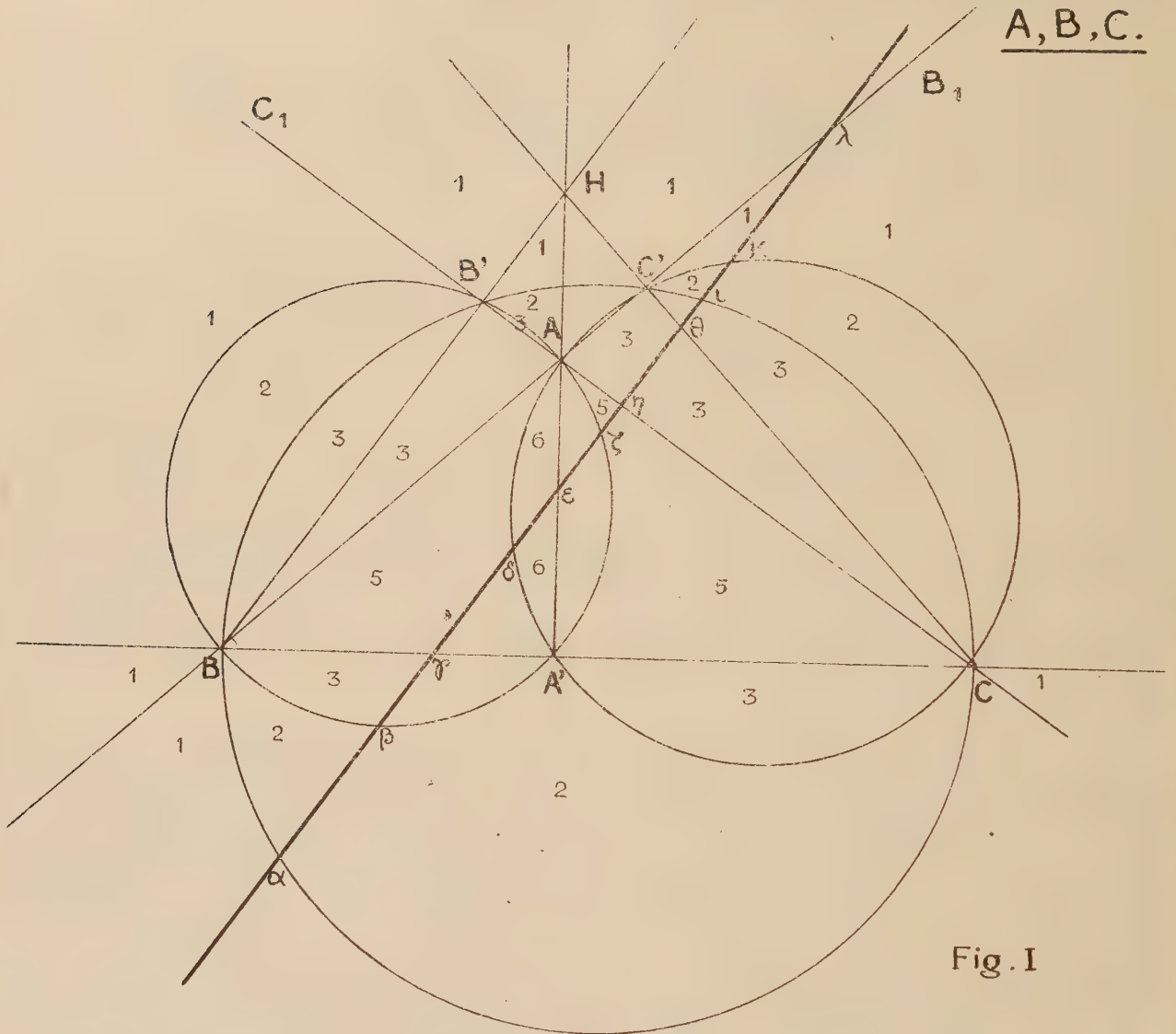


Fig. I

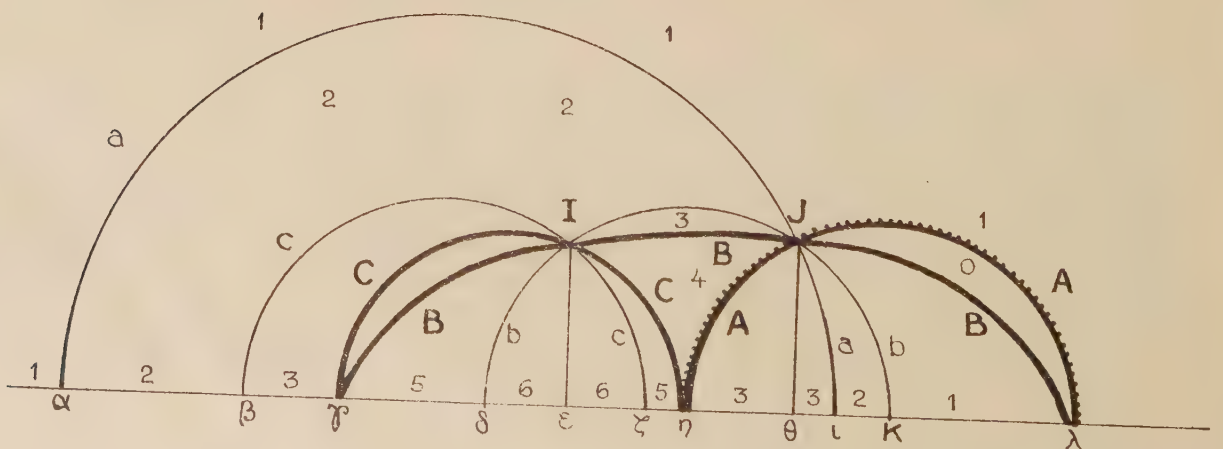


Fig. II

une coupe de la figure par un plan perpendiculaire au plan ABC nous choisirons un plan parallèle à BH, hauteur du triangle ABC (Planche III, fig.I)

La trace du plan de section sur le plan de la figure est la droite  $\alpha\mu$ ; les cercles seront coupés en  $\alpha, \epsilon, \beta, \gamma, \delta, \kappa$  les cotés du triangle ou leurs prolongements en  $\gamma, \eta, \lambda$ , la hauteur AH en  $\epsilon$  et la hauteur CH en  $\theta$ . Toutes ces longueurs ont été exactement reportées sur la planche III, fig.II.

Sur cette dernière figure on trace les intersections du plan de coupe avec les trois sphères: ce sont les cercles de diamètres  $\alpha\epsilon, \beta\gamma, \delta\kappa$ . Ces cercles se coupent deux à deux en I et J.

Le cône de sommet B est sectionné suivant une ellipse d'axe  $\delta\lambda$  cette ellipse doit passer par les points I et J, ce qu'on vérifie.

Le cône du sommet C est sectionné suivant un cercle puisque le plan de section est parallèle au plan de trace BH qui donnerait une section circulaire; ce cercle a  $\gamma\eta$  comme diamètre et doit passer par I; enfin le cône du sommet A, lequel s'appuie sur les angles aigus  $CAB_1$  et  $BAC_1$ , est sectionné lui aussi suivant le cercle de diamètre  $\eta\lambda$ , ce dernier doit passer par J ce que l'on vérifie.

Enfin pour terminer, on marquera sur la planche III les genres des trièdres SABC suivant les différentes positions de S; on se servira des résultats trouvés pour marquer sur la figure II de la planche III les genres de ce même trièdre sur la droite  $\alpha\lambda$ , ce qui permettra de trouver ces genres pour toutes les régions de la nouvelle figure. On sait que chaque fois que S, s'éloignant du plan ABC traverse l'une des sphères ou l'un des cônes B et C le genre du trièdre diminue d'une unité; au contraire lorsque S traverse le cône A le genre du trièdre augmente d'une unité; pour ne pas oublier cette circonstance remarquable le cercle correspondant, de diamètre  $\eta\lambda$  sera marqué à l'aide d'un trait deux fois renforcé.

Les résultats trouvés sont bien concordants, mais la complication des régions déterminées sur la planche III montre bien qu'une coupe était nécessaire, non seulement pour préciser le genre du trièdre SABC, mais aussi la nature de chacun des éléments de ce trièdre.

Maintenant que nous savons déterminer les genres des trièdres S, s'étant connu et S décrivant la demi-droite  $\alpha S$  il sera relativement aisé, pour chaque position de S, de déterminer aussi les genres des trièdres A, B, C.

### Etude des trièdres A, B, C

#### 1° - Le triangle ABC est acutangle

Malgré la complication de ce qui va suivre, ce cas est le plus simple. Il nous faudra encore (Planche IV) tracer les trois cercles de diamètres BC, CA, AB. Il faudra en outre tracer, issues de chaque sommet, les perpendiculaires aux côtés qui passent par ce sommet; nous numérotions avec des chiffres romains les régions obtenues, deux régions distinctes pourront contenir le même chiffre romain ce qui indiquera seulement qu'elles joueront le même rôle dans la détermination des genres des trièdres

A, B, C. Nous prendrons la précaution d'encadrer les chiffres romains des régions qui auront été étudiées afin qu'on puisse suivre, sans ambiguïté, puisque chacun de ces chiffres figure deux et trois fois sur la figure, les raisonnements faits pour une région qui porte un chiffre déterminé. La discussion est relativement aisée parce que la connaissance de  $s$  entraîne immédiatement la connaissance de la nature des éléments des trièdres A,B,C à l'exception toutefois, dans certains cas, de la nature des dièdres SA, SB, SC mais alors la connaissance du genre de  $S$  permet de suppléer à cette lacune.

Remarquons, et ceci nous aidera beaucoup, que lorsque  $S$  décrit la demi-droite  $sS$  le genre de chacun des trièdres A,B,C ne peut diminuer que d'une unité puisque la connaissance de  $s$  entraîne la connaissance de tous les éléments des trièdres A,B,C à l'exception éventuellement des seuls dièdres SA, SB, SC.

Ayant marqué sur la figure très soigneusement toutes les régions possibles, il ne nous reste plus qu'à résumer dans un tableau ce qui se passe pour chacune de ces régions quand  $S$  décrit  $sS$ .

Le triangle ABC est acutangle

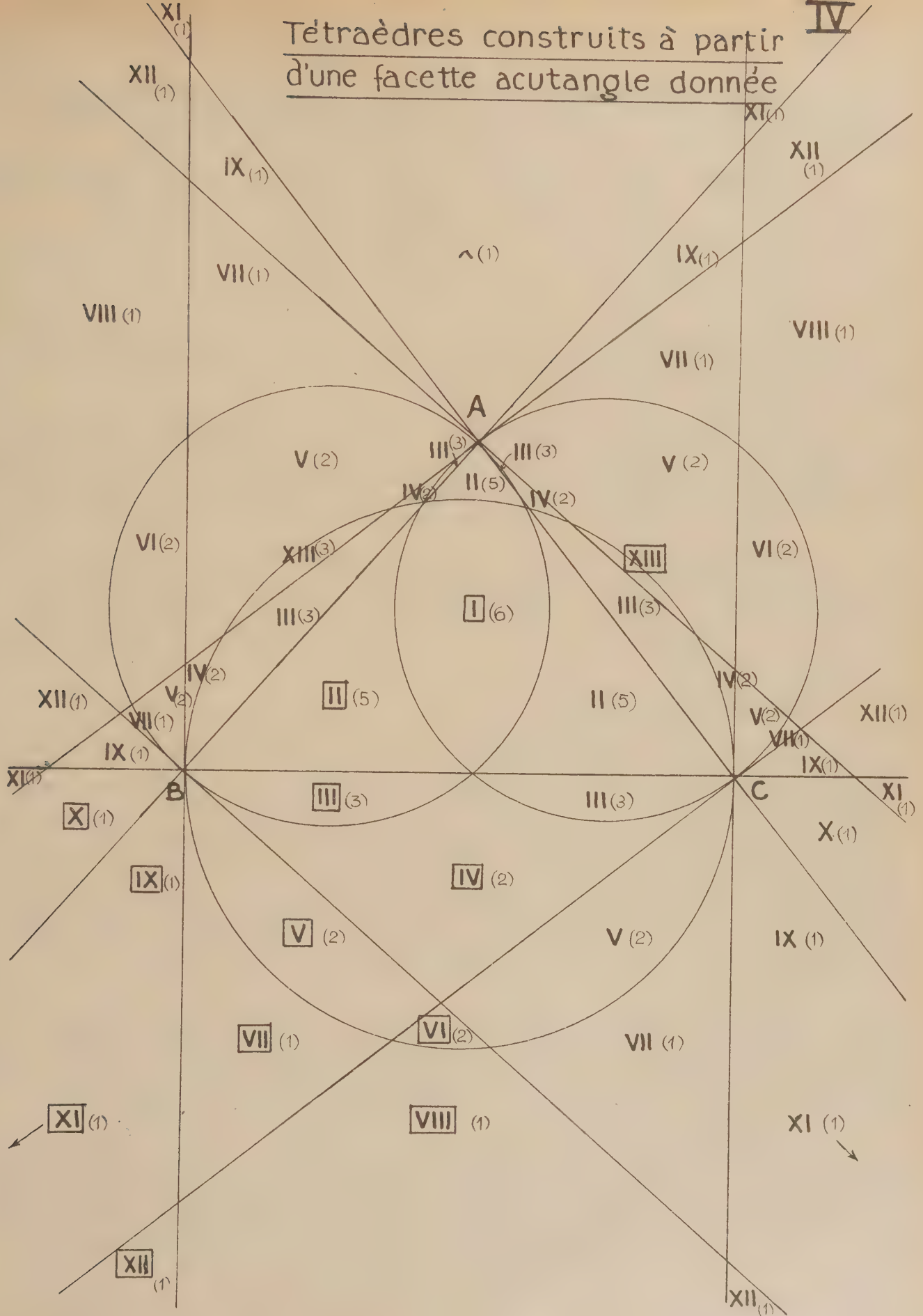
Genres des trièdres

| <u>Régions</u> | <u>S</u>         | <u>A</u> | <u>B</u> | <u>C</u> | <u>Résultats</u>                                       |
|----------------|------------------|----------|----------|----------|--------------------------------------------------------|
| I              | 6-5-4-3<br>2-1-0 | 1 - 0    | 1 - 0    | 1 - 0    | <u>6111-5111-4110</u><br><u>3100-2100-1100</u><br>0000 |
| II             | 5-4-3<br>2-1-0   | 1 - 0    | 1 - 0    | 1 - 0    | 5111-4110-3100<br>2100-1100-0000                       |
| III            | 3-2-1-0          | 1 - 0    | 1        | 1        | <u>3111-2111-1111</u><br>1100                          |
| IV             | 2-1-0            | 1 - 0    | 1        | 1        | 2111-1111-1100                                         |
| V              | 2-1-0            | 1 - 0    | 2        | 1        | <u>2211"-2111-2100</u>                                 |
| VI             | 2-1-0            | 1 - 0    | 2        | 2        | <u>2221 -2211'-2200</u>                                |
| VII            | 1-0              | 1 - 0    | 2        | 1        | 2111 - 2100                                            |
| VIII           | 1-0              | 1 - 0    | 2        | 2        | 2211'- 2200                                            |
| IX             | 1-0              | 1 - 0    | 3        | 1        | 3111 - 3100                                            |
| X              | 1-0              | 1        | 5-4      | 1        | 5111 - 4110                                            |
| XI             | 1-0              | 1        | 5-4      | 2        | <u>5211'- 4210</u>                                     |
| XII            | 1-0              | 1-0      | 3        | 2        | <u>3211'- 3200</u>                                     |
| XIII           | 3-2-1-0          | 2        | 1-0      | 1        | <u>3211"- 2211"</u><br>2111 - 2100                     |

NOTE: Lorsqu'on trouve pour la première fois le genre d'un tétraèdre sa formule est soulignée.

# Tétraèdres construits à partir d'une facette acutangle donnée

IV



Ayant examiné, lorsque le triangle est acutangle, tous les cas possibles, nous pouvons dresser une première liste des genres trouvés pour ce premier groupe de tétraèdres, ils sont au nombre de 19:

|      |       |      |       |       |      |      |
|------|-------|------|-------|-------|------|------|
| 6111 | 5211' | 4210 | 3211' | 2221  | 1111 | 0000 |
|      | 5111  | 4110 | 3211" | 2211' | 1100 |      |
|      |       |      | 3200  | 2211" |      |      |
|      |       |      | 3111  | 2200  |      |      |
|      |       |      | 3100  | 2111  |      |      |
|      |       |      |       | 2100  |      |      |

Remarquons que le nombre des faces obtuses pour chaque tétraèdre ne peut, dans le cas présent, excéder 3 puisque le triangle ABC est acutangle, c'est ce qu'on vérifie aisément.

L'orthocentre du triangle ABC se trouve dans la région I. On sait que dans ce cas S passe sans transition du genre 6 au genre 0. Les tétraèdres orthocentriques qu'on peut obtenir sont donc seulement des genres 6111 et 0000. Nous compléterons cette remarque ultérieurement en étudiant le cas du triangle obtusangle.

Avant d'aborder ce dernier cas insistons sur le fait que sur la planche IV le point M est certainement situé à l'intérieur du cercle de diamètre BC; si le triangle ABC, en effet est acutangle l'angle BMC, supplément de l'angle BAC, est certainement obtus et par suite M est intérieur au cercle de diamètre BC.

## 2° - Le triangle ABC est obtusangle.

Sur la Planche V on a dessiné un triangle ABC obtusangle (A obtus pour fixer les idées). Comme précédemment on a tracé les trois cercles ayant les trois côtés comme diamètres. Enfin par chaque sommet on mène les perpendiculaires aux côtés qui aboutissent à ce sommet. Ensuite on marque les régions déterminées par ces douze lignes. Il sera naturellement plus grand que dans le cas précédent puisque A ne joue pas le même rôle que B et C, angles aigus. Nous avons même hachuré l'angle déterminé par AC et par le prolongement de AB, ainsi que l'angle déterminé par AB et par le prolongement de AC afin de nous souvenir que ces régions sont telles que lorsque S décrit la demi-droite SS les genres successifs du trièdre S ne diminuent pas nécessairement d'une unité lorsque S traverse l'un des cônes. (1)

Remarquons que la région XXXI contient l'orthocentre du triangle ABC, ce qui prouve que les tétraèdres orthocentriques qui ont ABC pour l'une de leurs faces sont de genre 6111. Si nous rapprochons ce résultat de celui obtenu pour le triangle acutangle nous voyons qu'il n'existe que deux genres pour les tétraèdres orthocentriques 6111 et 0000.

Revenons aux tétraèdres quelconques. Nous avons montré, dans une première étude que vingt-neuf genres sont possibles; nous venons de prouver que vingt-sept d'entre eux seulement peuvent être effectivement construits. Comme cette étude est longue et minutieuse et que, malgré toutes les précautions prises, une erreur aurait pu se glisser, nous allons démontrer qu'il ne peut exister aucun tétraèdre de genre 2222, ni aucun de genre 5211".

(1) voir le tableau à la page suivante.

Le triangle ABC est obtusangle

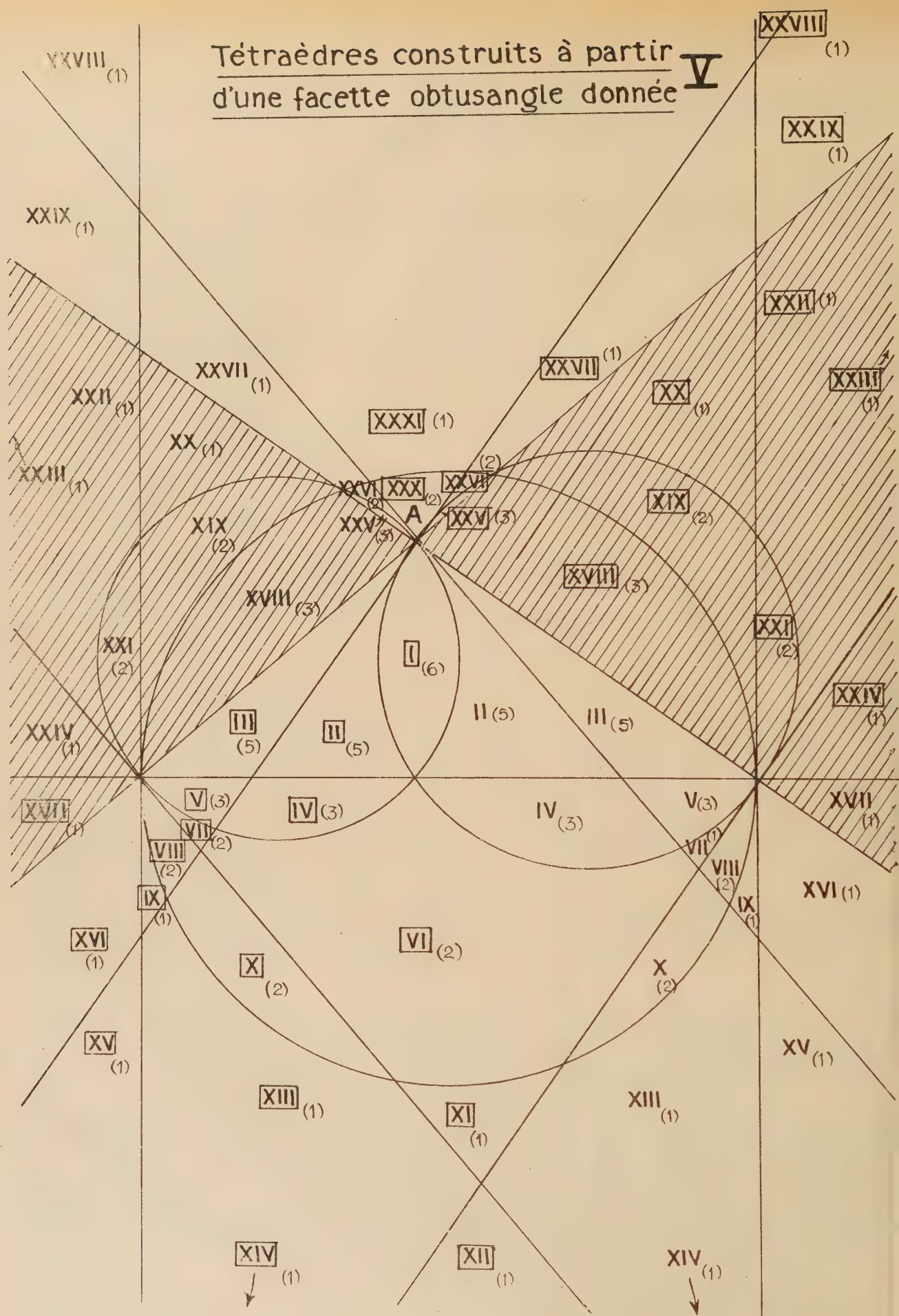
Genres des trièdres

| Régions            | <u>S</u>       | <u>A</u> | <u>B</u> | <u>C</u> | Résultats                                 |
|--------------------|----------------|----------|----------|----------|-------------------------------------------|
| I                  | 6-5-4<br>3-2-1 | 2        | 1-0      | 1-0      | <u>6211-5211'-4210</u><br>3200-2200- 2100 |
| II                 | 5-4-3<br>2-1   | 2        | 1-0      | 1-0      | 5211'-4210-3200<br>2200- 2100             |
| III                | 5-4-3<br>2-1   | 3        | 1-0      | 1-0      | <u>5311-4310-3300</u><br>3200-3100        |
| IV                 | 3-2-1          | 2        | 1        | 1        | 3211-2211'-2111                           |
| V                  | 3-2-1          | 3        | 1        | 1        | <u>3311'-3211'-3111</u>                   |
| VI                 | 2-1            | 2        | 1        | 1        | 2211' - 2111                              |
| VII                | 2-1            | 3        | 1        | 1        | 3211' - 3111                              |
| VIII               | 2-1            | 3        | 2        | 1        | <u>3221</u> - 3211"                       |
| IX                 | 1              | 3        | 2        | 1        | 3211"                                     |
| X                  | 2-1            | 2        | 2        | 1        | 2221 - 2211"                              |
| XI                 | 1              | 2        | 1        | 1        | 2111                                      |
| XII                | 1              | 2        | 2        | 2        | 2221                                      |
| XIII               | 1              | 2        | 2        | 1        | 2211"                                     |
| XIV                | 1              | 2        | 2        | 3        | 3221                                      |
| XV                 | 1              | 2        | 3        | 1        | 3211"                                     |
| XVI                | 1              | 3        | 3        | 1        | <u>3311"</u>                              |
| XVII               | 1-0-1          | 3-4      | 5-4      | 1        | 5311-4310- <u>4411</u>                    |
| XVIII <sub>1</sub> | 3-4-3<br>2-1   | 3-4      | 1-0      | 1        | 3311"-4411-4310<br>4210 -4110             |
| XVIII <sub>2</sub> | 3-2-1-0<br>1   | 3-4      | 1-0      | 1        | 3311"-3211"-3111<br>3100 -4110            |
| XIX                | 2-1-0-1        | 3-4      | 1-0      | 1        | 3211"-3111-3100<br>4110                   |
| XX                 | 1-0-1          | 3-4      | 1-0      | 1        | 3111-3100 4110                            |
| XXI                | 2-1-0-1        | 3-4      | 1-0      | 2        | 3221-3211' -<br>3200-4210                 |
| XXII               | 1-0-1          | 3-4      | 1-0      | 2        | 3211'-3200-4210                           |
| XXIII              | 1-0-1          | 3-4      | 1-0      | 3        | 3311'-3300-4310                           |
| XXIV               | 1              | 5        | 1        | 3        | 3311                                      |
| XXV                | 3-2-1          | 5        | 1        | 1        | 5311-5211'-5111                           |

Note: Tous les nouveaux genres de tétraèdres ont leur formule soulignée.

# Tétraèdres construits à partir d'une facette obtusangle donnée

V



Le triangle ABC est obtusangle

Genre des trièdres

| Régions           | <u>S</u> | <u>A</u> | <u>B</u> | <u>C</u> | Résultats       |
|-------------------|----------|----------|----------|----------|-----------------|
| XXVI              | 3-2      | 6        | 2        | 2        | 5211' 5111      |
| XXVII             | 1        | 5        | 1        | 1        | 5111            |
| XXVIII            | 1        | 6        | 1        | 2        | 6211            |
| XXIX              | 1        | 5        | 1        | 2        | 5211'           |
| XXX               | 2-1      | 6        | 1        | 1        | 6211- 6111      |
| XXXI              | 1        | 6        | 1        | 1        | 6111            |
| IV <sub>bis</sub> | 3-2-1    | 2        | 2        | 1        | 3221-2221-2211" |

Réunissons maintenant les nouveaux genres de tétraèdres trouvés alors que le triangle ABC est obtusangle. Ils concernent tous des tétraèdres ayant quatre faces obtuses, ce qu'on vérifie facilement.

Ce sont les genres suivants, au nombre de huit:

|      |      |      |       |
|------|------|------|-------|
| 6211 | 5311 | 4411 | 3311' |
|      |      | 4310 | 3311" |
|      |      |      | 3300  |
|      |      |      | 3221  |

Nous avons donc pu construire en tout vingt sept genres de tétraèdres. Ce sont:

|      |       |      |       |       |      |      |
|------|-------|------|-------|-------|------|------|
| 6211 | 5311  | 4411 | 3311' | 2221  | 1111 | 0000 |
| 6111 | 5211' | 4310 | 3311" | 2211' | 1100 |      |
|      | 5111  | 4210 | 3300  | 2211" |      |      |
|      |       | 4110 | 3221  | 2200  |      |      |
|      |       |      | 3211' | 2111  |      |      |
|      |       |      | 3211" | 2100  |      |      |
|      |       |      | 3200  |       |      |      |
|      |       |      | 3111  |       |      |      |
|      |       |      | 3100  |       |      |      |

Voici pour le genre 2222 une première démonstration: supposons qu'il existe un tétraèdre de genre 2222, ce tétraèdre aurait ses quatre faces obtuses; pour le construire il faudrait donc partir d'un triangle de base ABC. obtusangle. ce que nous ferons. Nous tracerons. pour chaque sommet, les perpendiculaires aux côtés du triangle qui passent par chacun des sommets, ce qui nous permettra de connaître, par avance, dans quelle région du plan s doit se trouver pour que le trièdre A soit de genre 2 (SA obtus); puis pour que le trièdre B soit de genre 2 et enfin pour que le trièdre C soit de genre 2, ceci sera sûrement acquis si SBA et SCA sont des angles obtus puisque le dièdre BC sera alors obtus. Ces régions sont couvertes de hachures (fig.44)

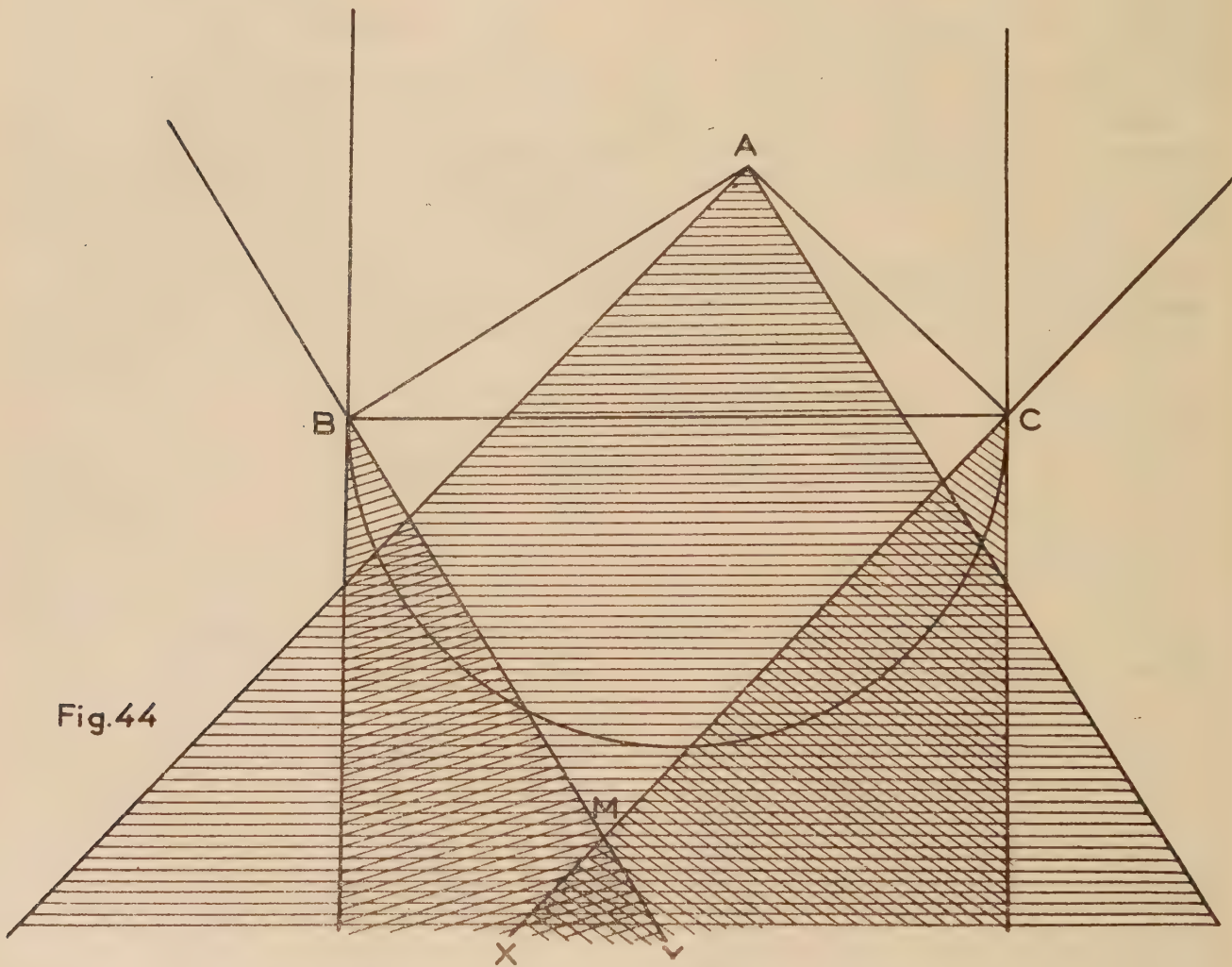


Fig.44

La seule région triplement hachurée est l'intérieur de l'angle XMY, or nous avons vu précédemment que M est sûrement extérieur au cercle de diamètre BC, ce qui prouve que s étant situé dans l'angle XMY, S est de

genre 1 et seulement de genre 1 en définitive le trièdre construit ne pourra être que de genre 2221 et non de genre 2222.

Donnons maintenant une autre démonstration qui ne suppose pas que le triangle ABC ait un caractère privilégié. Soit SABC un tétraèdre supposé de genre 2222; le trièdre S a une face obtuse soit BSC. Puisqu'il est de genre 2 le dièdre SA est obtus; comme le trièdre A est de genre 2 et que SA est obtus; ceci exige que BAC soit la face obtuse. On voit immédiatement que seule la face ABS du trièdre B peut être obtuse et seule la face ACS du trièdre C peut aussi être obtuse. Le dièdre BC est naturellement obtus.

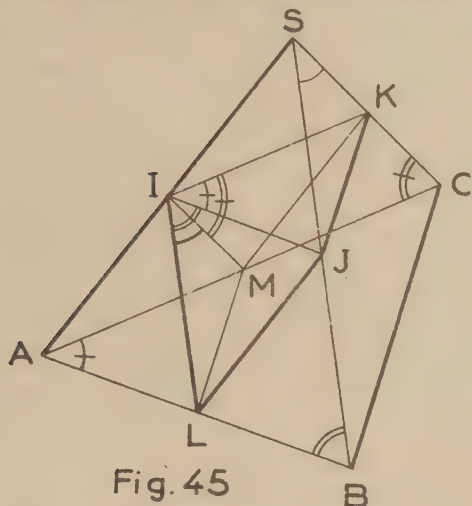


Fig. 45

Désignons maintenant par I, J, K, L et M les milieux des arêtes SA, SB, SC, AB, AC. On sait que LJKM est un parallélogramme, si l'on joint I aux sommets de ce parallélogramme on forme un angle tétraèdre convexe. Il est facile de voir que les faces

de cet angle polyèdre sont justement égales aux angles BSC, BAC, ABS, ACS. Or la somme des faces d'un angle polyèdre convexe est inférieure à 4 droits ce qui interdit à ses 4 faces d'être chacune un angle obtus: ce tétraèdre ne peut donc être construit. Il est intéressant de voir que l'impossibilité de construire un tétraèdre de genre 2222 équivaut à l'impossibilité de construire un angle tétraèdre convexe tel que la somme de ses faces soit supérieure à 4 droits. Cette deuxième démonstration introduit une relation de cause à effet entre deux propriétés en apparence assez éloignées.

Comme le nombre des faces obtuses d'un tétraèdre est au plus égal à 4, on peut énoncer le théorème suivant:

Théorème: Dans un tétraèdre il existe toujours un trièdre qui a toutes ses faces aiguës.

On peut même constater en outre que seuls les tétraèdres de genres 3221 et 2221 ont des faces obtuses réparties sur trois trièdres différents, de sorte que dans 25 cas sur 27 les faces obtuses d'un tétraèdre sont réparties seulement sur deux trièdres.

Nous allons montrer maintenant que seul le tétraèdre 5211' peut être construit.

Nous avons le droit de choisir comme plan de base le triangle ABC obtusangle en A, auquel est opposé le trièdre S de genre 5. Dans ces conditions les trois dièdres AB, BC, CA sont aigus et le point S se projette en s intérieurement au triangle ABC. Pour qu'on puisse obtenir un tétraèdre de genre 5211 il faut que s soit situé dans la région couverte de hachures. S'il s'agit d'une des régions marquées (5) on voit immédiatement que s est extérieur, soit à la sphère de diamètre AC, soit à la sphère de

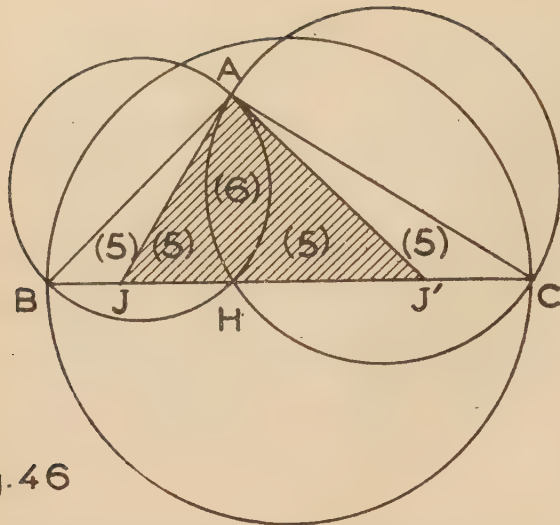


Fig. 46

nous utiliserons désormais la notation 5211 pour le tétraèdre 5211' puisqu'il ne peut plus y avoir d'ambiguïté

diamètre  
AB en tout cas jamais à la sphère de  
diamètre BC de sorte que pour le tétraè-  
dre 5211 construit lorsque la cote de S  
croît, l'angle SEC est obtus ce qui  
prouve que le tétraèdre est de genre  
5.211: Si S est situé dans la région (6)  
le tétraèdre devient de genre 5211 quand  
SL traverse l'une des trois sphères de  
diamètre AB, BC, CA, il suffit de regar-  
der la coupe représentée sur la planche  
III pour se rendre compte que la sphère  
traversée sera celle de diamètre AB ou  
le diamètre AC, jamais celle de diamètre  
BC. Le genre 5211'', prévisible dans une  
première analyse, ne peut être réalisé

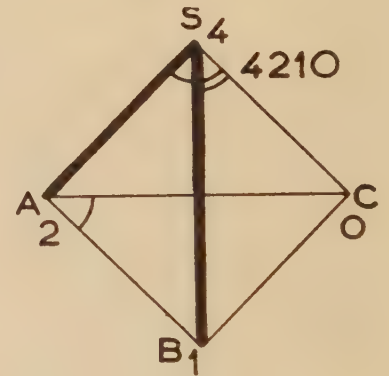
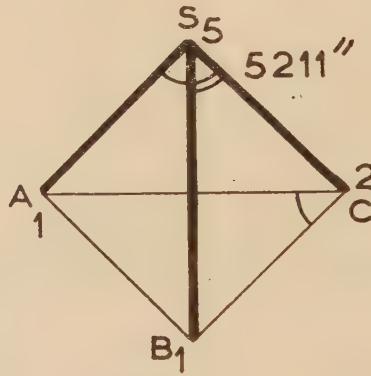
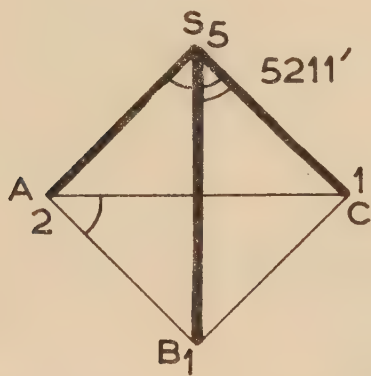


Fig. 47

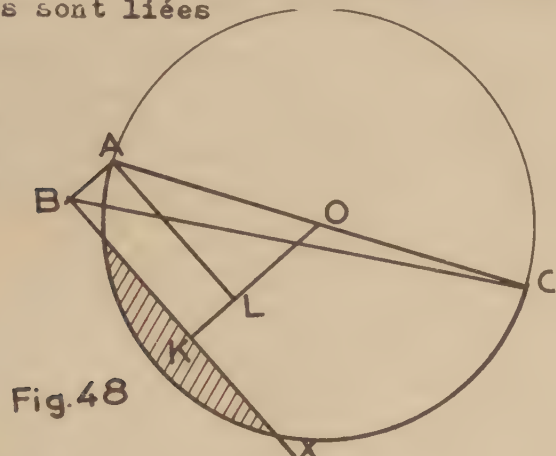
On peut encore comprendre que le genre 5211'' ne peut exister en remarquant que si on augmente la cote de S on trouve ensuite le genre 4210 qui se distingue du précédent en ce qu'il a perdu un dièdre obtus. Or ce dièdre ne peut être que celui qui est opposé à la face aiguë de S, c'est-à-dire SC, mais ceci exclut la possibilité que C ait une face obtuse alors que A peut en avoir une.

En définitive les 27 formes trouvées comportent seulement trois genres 3311, 3211, 2211 présentant deux dispositions architecturales différentes. Leur existence pouvait être prévue, nous venons de montrer qu'ils sont effectivement réalisables; nous aurons l'occasion de les étudier à nouveau et de comparer l'importance des formes ' et des formes ''.

Avant de terminer cet inventaire des genres de tétraèdre, nous voudrions montrer qu'il existe pour la planche V une disposition de figure un peu différente de celle que nous avons dessinée.

Il peut se faire en effet que la perpendiculaire menée par B à AC coupe le cercle de diamètre AC, ce qui introduira une nouvelle région que

nous nommerons IV bis. Il est bien évident que puisque nous avons prouvé que 27 formes seulement sont effectivement réalisables nous ne devons trouver pour cette région IV bis que des formes connues, mais plus tard nous attacherons de l'importance à la succession des formes rencontrées lorsque la cote de S croît de 0 à l' $\infty$ , il est donc important d'avoir un inventaire complet des formes rencontrées et de marquer de quelle manière elles sont liées



La région hachurée est la région IV bis. Montrons que son existence est possible. Nous devons écrire que  $OK$ , distance de  $O$ , milieu de  $AC$ , à  $BX$ , perpendiculaire élevée en  $B$  à  $AB$ , est inférieure à  $\frac{AC}{2}$

Comme  $BAO$  est obtus on voit que  $OK = OL + KL$ .

$$\text{Or } OL = OA \cos AOL \\ = - OA \cos A$$

$$\text{la condition } OL + KL < \frac{AC}{2}$$

devient  $AB - OA \cos A < OA$

$$AB < \frac{AC}{2} (1 + \cos A) \quad \text{ou} \quad AB < AC \cos^2 \frac{A}{2}$$

condition évidemment réalisable puisqu'on peut disposer de  $AC$ , de l'angle  $A$ , il suffira de prendre  $AB$  suffisamment petit.

On voit que si le tétraèdre est aplati et que si  $s$  est situé dans la région IV bis le trièdre  $s$  est de genre 3, ses genres seront donc successivement 3, 2, 1. Les trièdres  $A$  et  $B$  sont de genre 2,  $C$  est de genre 1. On trouve successivement les genres 3221, 2221, 2211".

Remarque : L'étude précédente si minutieuse et si monotone aurait pu être allégée si l'on tient compte des faits suivants: on aurait pu se limiter au cas du triangle obtusangle de sorte qu'on aurait ainsi construit tous les tétraèdres ayant au moins une face obtusangle les seuls tétraèdres restants auraient été des tétraèdres ayant toutes leurs faces aiguës ce qui ne donnait comme possibilité que les genres:

1111  
1100  
0000

En procédant comme nous l'avons fait pour le genre 2222 on couvrirait de hachures les régions pour lesquelles les trièdres  $A$ ,  $B$ ,  $C$  peuvent être de genre 1 et on montrerait aisément que  $S$  peut lui-même être de genre 1; enfin on montrerait qu'il peut exister de tétraèdres des genre 1100 et de genre 0000.

Nous avons préféré, malgré cette possibilité de simplification,

laisser subsister notre démonstration complète qui, étant complètement indépendante de la première étude, confirme les résultats trouvés dans cette étude puisque nous avons démontré directement que les genres 2222 et 5211" ne peuvent être construits.

En résumé tous les résultats concordent et l'existence de 27 genres de tétraèdres et de 27 seulement est pleinement acquise.

Donnons maintenant la liste définitive des 27 genres de tétraèdres, caractérisés par leurs formules. Pour alléger un peu la terminologie nous pourrions substituer à chacune de ces formules une lettre de l'alphabet grec en faisant suivre les lettres  $\gamma, \mu, \sigma$  des mentions ' et " afin de distinguer les tétraèdres qui ont même formule globale et deux dispositions d'éléments.

|            |        |            |        |          |      |
|------------|--------|------------|--------|----------|------|
| $\alpha$   | 0000   | $\zeta$    | 3100   | $\pi$    | 4110 |
| $\beta$    | 1100   | $\kappa$   | 3111   | $\rho$   | 4210 |
| $\gamma$   | 1111   | $\lambda$  | 3200   | $\sigma$ | 4310 |
| $\delta$   | 2100   | $\mu'$     | 3211'  | $\tau$   | 4411 |
| $\epsilon$ | 2111   | $\mu''$    | 3211'' | $\sim$   | 5111 |
| $\zeta$    | 2200   | $\nu$      | 3221   | $\phi$   | 5211 |
| $\eta'$    | 2211'  | $\xi$      | 3300   | $\chi$   | 5311 |
| $\eta''$   | 2211'' | $\theta'$  | 3311'  | $\psi$   | 6111 |
| $\theta$   | 2221   | $\theta''$ | 3311'' | $\omega$ | 6211 |

Nous joindrons à cette liste une planche qui représente symboliquement les 27 formes de tétraèdres. Pour rendre les résultats plus frappants nous avons utilisé un tableau à double entrée qui met en évidence les thèmes des dièdres et des faces (1) (Planche VI)

On remarque que si l'on se donne en même temps le thème des dièdres et celui des faces le genre du tétraèdre est en général déterminé. Il n'y a qu'un cas d'exception: les tétraèdres  $O'$  et  $O''$  ont en effet même thèmes de dièdres et de faces; mais dans le cas du tétraèdre  $O''$  le dièdre commun aux deux trièdres possédant les faces obtuses est aigu alors qu'il est obtus dans le cas du tétraèdre  $O'$ .

Le tétraèdre  $o'$  présente du reste une disposition de dièdres obtus normale pour les tétraèdres qui ont quatre faces obtuses groupées deux par deux; le cas de  $o''$  est donc une exception. Il en est de même pour  $\eta''$  et  $\mu''$  mais le nombre et la disposition de leurs faces obtuses suffit à caractériser ces deux derniers tétraèdres qui ont donc une structure encore plus originale que  $o''$ .

S'il s'agit de déterminer le genre d'un tétraèdre le tableau montre que le seul examen des faces permet d'identifier six tétraèdres:  $\eta'', \theta, \mu'', \gamma, \psi, \omega$ . Le seul examen des dièdres permet d'identifier deux tétraèdres  $\alpha, \tau$ .

Nous venons de voir qu' $o''$  est unique pour sa disposition des dièdres obtus, dans le groupe des tétraèdres ayant un thème de faces 22.

(1) Glossaire

Thèmes des dièdres

Thèmes des faces

|      |  | 0        | 1         | 2 =                     | 2 ^      | 3 ^      | 3 Z    |
|------|--|----------|-----------|-------------------------|----------|----------|--------|
|      |  |          |           |                         |          |          |        |
| 0    |  | $\alpha$ | $\beta$   | $\gamma$                |          |          |        |
| 1    |  |          | $\delta$  | $\epsilon$              |          |          |        |
| 11'  |  |          | $\zeta$   | $\eta$                  |          |          |        |
| 11'' |  |          |           | $\eta''$                |          |          |        |
| 111  |  |          |           | $\theta$                |          |          |        |
| 2    |  |          | $\iota$   | $\kappa$                | $\pi$    | $\rho$   |        |
| 21'  |  |          | $\lambda$ | $\mu$                   | $\rho$   | $\phi$   |        |
| 21'' |  |          |           | $\mu''$                 |          |          |        |
| 211  |  |          |           | $\nu$                   |          |          |        |
| 22   |  |          | $\xi$     | $\alpha'$<br>$\alpha''$ | $\sigma$ | $\chi$   | $\tau$ |
| 3    |  |          |           |                         |          | $\psi$   |        |
| 31   |  |          |           |                         |          | $\omega$ |        |

Légende : Les traits forts indiquent les dièdres obtus  
Les angles marqués les faces obtuses

Il reste dans ces conditions 18 tétraèdres pour lesquels il faut connaître à la fois le thème des faces et celui des dièdres. Tous les tétraèdres très simples, très originaux ou très complexes de structure auront été caractérisés très simplement; les autres demanderont un examen plus complet.

Enfin il est nécessaire d'insister sur l'importance du thème de deux dièdres opposés: onze tétraèdres sur vingt-sept présentent cette disposition. Certains thèmes se révèlent donc très féconds alors que d'autres ne donnent naissance qu'à un genre. On doit insister sur le fait que l'architecture des genres " est normale alors que celle des genres " est exceptionnelle.

### Construction effective des 27 formes de tétraèdres

Il est indispensable de savoir réaliser matériellement toutes ces formes.

Donnons-nous une face fixe ABC du tétraèdre à construire et supposons que S soit variable sur une droite perpendiculaire en s au plan ABC. On sait qu'on détermine le genre du tétraèdre SABC en précisant la position de S par rapport aux trois sphères de diamètre BC, CA, AB et aux trois cônes de sommets A,B,C définis précédemment. Pour les sphères il suffit d'étudier les puissances de s par rapport à ces trois sphères; pour les cônes, en utilisant leurs sections circulaires, cela revient encore à étudier les puissances de s par rapport à trois nouvelles sphères, variables cette fois, mais définies pour chaque position de s. On calcule ainsi pour quelle cotes de S on traversera chacune de ces six sphères; en faisant varier s convenablement et en supposant successivement le triangle ABC acutangle ou obtusangle on peut réaliser les vingt-sept genres de tétraèdres; nous avons naturellement fait tous ces calculs et construit des maquettes de tous ces tétraèdres.

### Projections orthogonales de chaque sommet d'un tétraèdre sur la facette opposée.

Considérons un tétraèdre et projetons l'un de ses sommets sur le plan de la facette opposée. Les trois droites qui définissent un triangle partagent son plan en 7 régions que nous caractériserons par une lettre.

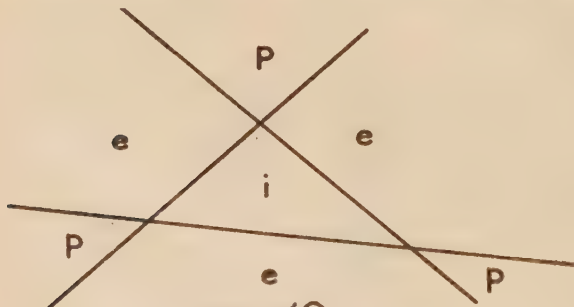


Fig.49

Nous nous proposons de déterminer, connaissant le genre du trièdre, dans quelles régions i,e,p, se font les quatre projections orthogonales de ses quatre sommets sur le plan de la facette opposée.

Il est facile de voir que, seuls les dièdres obtus du tétraèdre, interviennent ici. Comme il n'y a que six possibilités de dièdres obtus on doit

s'attendre à trouver six cas seulement pour l'ensemble des tétraèdres.

Si une facette du tétraèdre est adjacente à trois dièdres aigus la projection du sommet opposé se fait dans la région i.

Si une facette du tétraèdre est adjacente à un seul dièdre obtus la projection du sommet opposé se fait dans une région e.

Si une facette du tétraèdre est adjacente à deux dièdres obtus la projection du sommet opposé se fait dans une région p.

Enfin, on sait qu'aucune facette du tétraèdre ne peut être adjacente à trois dièdres obtus.

Dans ces conditions les résultats sont les suivants:

|   |                           |             |
|---|---------------------------|-------------|
| 0 | dièdre obtus :            | i, i, i, i. |
| 1 | dièdre obtus :            | i, i, e, e. |
| 2 | dièdres obtus opposés:    | e, e, e, e. |
| 2 | dièdres obtus concernants | i, e, e, p. |
| 3 | dièdres obtus concernants | i, p, p, p. |
| 3 | dièdres obtus Z           | e, e, p, p. |

Le genre  $\alpha$  est le seul tétraèdre tel que chaque sommet se projette à l'intérieur de la face opposée. Le genre Z est le seul tétraèdre tel que deux projections soient dans une région e et deux autres dans une région p. On devait s'attendre à ces résultats puisque les genres  $\alpha$  et Z sont caractérisés par la nature de leur dièdres.

Si l'on possède un tétraèdre en bois ou en carton, la connaissance de la formule de ses projections indique immédiatement le nombre et la disposition de ses dièdres obtus et comme les faces obtuses sont plus faciles à repérer par simple examen direct, on peut déterminer ainsi rapidement le genre d'un tétraèdre, sauf si les éléments obtus diffèrent peu de l'angle droit. Si l'on est proche d'un terme de passage il faut alors mesurer les arêtes, calculer les cosinus des faces, ce qui permet de déterminer ensuite la nature des dièdres du tétraèdre.

---

## II - FAMILLES DE TETRAEDRES

Considérons le tétraèdre aplati  $sABC$  de genre 6211; on sait qu'en faisant croître la cote de  $S$  de 0 à l'infini on obtient successivement les tétraèdres 5211, 4210, 3200, 2200, 2100, le trièdre  $S$  perdant successivement une face obtuse, un dièdre obtus, un 2<sup>e</sup> dièdre obtus, une 2<sup>e</sup> face obtuse, une 3<sup>e</sup> face obtuse; mais on peut supposer que le tétraèdre 6211 au lieu de perdre une face obtuse sur le trièdre de genre 6 la perde sur le trièdre de genre 2, ce qui donnerait un tétraèdre 6111. Du reste, si on impose à un tétraèdre 6211 de perdre un élément obtus et un seul on ne peut envisager que ces deux cas. En effet si l'un des trièdres de genre 1 devenait de genre 0, il perdrait un dièdre obtus ce qui exigerait que le trièdre de genre 6 en perde un lui aussi, mais celui-ci ne peut le faire qu'en perdant au préalable une face obtuse de sorte que le nombre total des éléments obtus diminuerait de deux unités et non d'une unité.

Les tétraèdres 6111 et 5211 sont donc les seuls descendants au premier degré du tétraèdre 6211. On pourra recommencer la même opération sur ces deux tétraèdres et dresser en somme un arbre généalogique du tétraèdre 6211, la descendance s'achevant avec le genre 0000.

Dans les mêmes conditions on voit que le tétraèdre 4411 peut perdre un dièdre obtus sur l'arête joignant les sommets 4-4 et devenir 3311" ou qu'il peut perdre un dièdre obtus sur l'arête joignant deux sommets 4 et 1 et devenir 4310. Ce sont du reste les seuls descendants au premier degré de 4411.

Si on examine la liste des 27 genres de tétraèdres, on remarque que 3 d'entre eux seulement ont leur maximum d'éléments obtus: 3 dièdres et 4 faces. Ce sont les tétraèdres 6211, 5311, 4411. Ces tétraèdres sont donc indépendants les uns des autres au point de vue qui nous occupe: ce sont trois chefs de file. Après avoir étudié leurs descendance on constate que cinq tétraèdres n'en font pas partie. Ce sont 3221, 2221, 3311', 3211', 2211'. Parmi ces cinq tétraèdres 2 seulement ont 6 éléments obtus (4 faces et deux dièdres opposés): 3311' et 3221. C'est à partir d'eux qu'il faudra constituer de nouvelles descendance, on vérifie qu'elles contiennent les tétraèdres 2221, 3211; et 2211'.

Il existe donc 5 familles naturelles de tétraèdres

On constate que 6211 donne naissance à 12 formes, 5311 à 13 formes, 4411 à 17 formes, 3311' à 13 formes et 3221 à 15 formes.

La forme la plus féconde est donc 4411 ce qui ne surprend pas. La disposition des 3 dièdres obtus de ce tétraèdre est telle qu'il peut perdre un dièdre obtus de deux manières différentes ce qui le relie à deux groupes importants et bien différenciés, celui des tétraèdres ayant deux dièdres obtus opposés et celui des tétraèdres ayant deux dièdres obtus concourants.

A titre de vérification on peut suivre sur ces cinq filiations tous

les cas étudiés précédemment lorsqu'on a justement établi l'existence de ces 27 genres de tétraèdres. En général la descendance s'obtiendra en faisant croître la cote de S; mais si ABC est obtusangle en A et que S soit intérieur au cône relatif au trièdre A et si la cote de S croît de 0 à l'infini, le genre du trièdre S augmente d'une unité quand S franchit le cône relatif au trièdre A et diminue d'une unité chaque fois que S traverse les cônes restants ou l'un des trois sphères de diamètres AB, BC et CA.

#### RESILLE GENEALOGIQUE DES TETRAEDRES(1)

Pour représenter graphiquement l'arbre généalogique des cinq familles principales nous conviendrons de symboliser chaque genre de tétraèdre par un point et, par un segment de droite réunissant deux points, le fait que les deux genres diffèrent seulement par la présence d'un dièdre obtus ou d'une face obtuse de plus ou de moins: nous nommerons désormais liaison un tel segment de droite (1).

Nous avons vu que 6211 donne naissance à 12 formes. Il est naturel d'essayer d'écrire chacun de ces genres une fois et une fois seulement; on constate que le terme d'arbre généalogique est impropre et qu'il s'agit d'une sorte de filet plat, dont les mailles sont des quadrilatères convexes, qu'on représentera pour simplifier par des carrés, forme topologiquement équivalente (Planche VII). De même la famille de 5311 peut être aussi symbolisée facilement par un filet plat, la maille étant toujours un carré. On peut ensuite aisément réunir ces deux filets en un seul. (Planche VII). Le filet de 4411 peut aussi être construit dans un plan, mais il contient une maille octogonale, circonstance destinée à être unique.

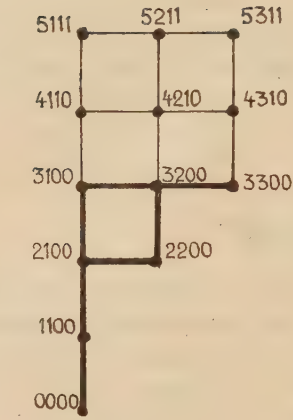
La construction des filets des deux dernières familles est plus complexe; il devient avantageux de réaliser une figure de l'espace; les mailles étant toutes des quadrilatères convexes on introduit ainsi un cube pour chacune des deux familles. il est aisé ensuite de les réunir en superposant les deux cubes auxquels on peut donner une base commune (Planche VII). Enfin on peut réunir en une seule figure (voir page suivante) les filets relatifs aux familles 6211, 5311, 3311', 3221 (Planche VIII) et y ajouter pour finir les deux seuls tétraèdres qui n'y figurent pas: 4411 et 3311" (Planche VIII). En modifiant encore légèrement cette figure on réalise la figure définitive à laquelle nous proposons de donner le nom: de résille généalogique des tétraèdres ou plus simplement de résille des tétraèdres (Planche IX)

Pour caractériser cette figure au point de vue topologique nous avons réussi à la placer sur un tore auquel on adjoint les deux plans tangents perpendiculaires à l'axe de symétrie du tore et limités aux cercles de contact (Planche X)

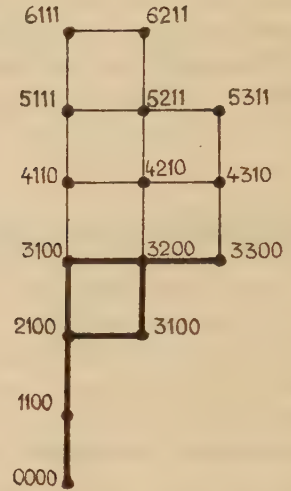
Sur cette dernière figure les liaisons sont représentées en trait accentué si elles sont placées en avant du tore et en trait interrompu si



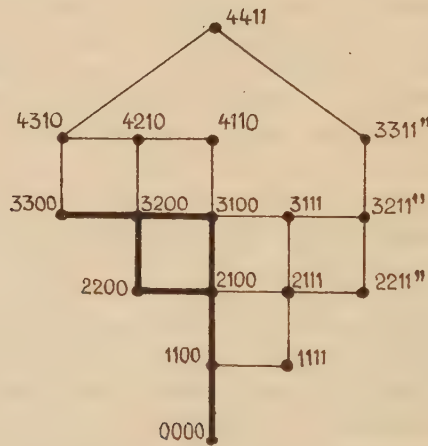
Famille de 6211



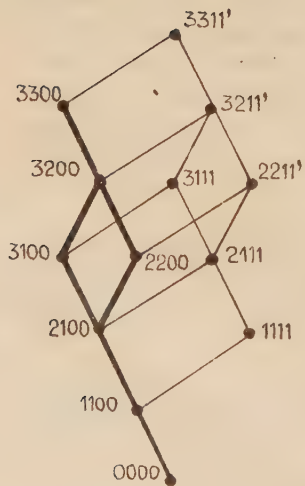
Famille de 5311



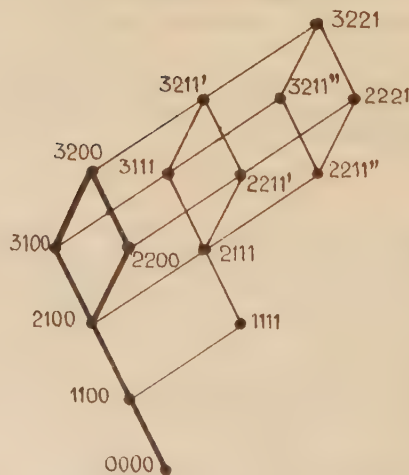
Familles de 6211 et de 5311



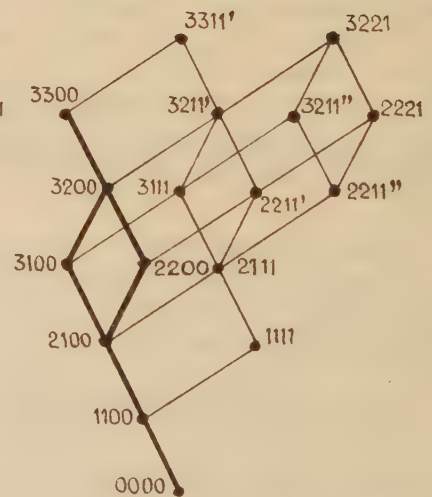
Famille de 4411



Famille de 3311'



Famille de 3221



Familles de 3311' et de 3221

elles sont placées en arrière du tore, qui est supposé opaque; mais les plans tangents sont, eux, transparents.

On peut remarquer que la résille se présente comme faisant partie d'un filet régulier à symétrie septénaire; la longue liaison 4411 - 3311" qui paraît si étrange, sur la planche IX, est un élément de cet hypothétique filet; ce dernier a été représenté en trait fin lorsqu'il est en avant du tore, en trait ponctué lorsqu'il est caché par le tore. Les genres 0000 et 4411 peuvent être placés aux centres des cercles de contact des deux plans tangents: c'est-à-dire très simplement. Nous ne voudrions pas fatiguer le lecteur en insistant lourdement sur les difficultés que nous avons éprouvées pour construire cette résille. Nous ferons seulement remarquer qu'après avoir péniblement construit la dernière figure de la planche VIII nous avons d'abord eu l'idée de construire cette résille pour tore et que c'est justement en sectionnant le tore par un plan passant par son axe de symétrie et s'insérant entre les genres 6111 et 3311" que nous avons enfin construit la figure de la planche IX dont la simplicité est bien plus grande. Nous avons mis ainsi en évidence le thème de répétition de la figure, thème qui comporte huit sommets, et qui a longtemps passé inaperçu parce que, par une malice des choses, il n'est jamais complet. C'est un carré dont deux cotés concourants sont prolongés du double de leurs longueurs.

Nous avouons avoir longtemps contemplé la résille des tétraèdres avec la joie du cristallographe qui parvient à retrouver sous la complexité d'une macle la simplicité des éléments constitutants!

Nous nous excusons d'avoir tant insisté sur la manière dont nous avons réussi à résoudre ce problème; mais puisqu'il s'agit de recherches de mathématiques élémentaires nous serions heureux que de jeunes lecteurs puissent trouver dans ce récit beaucoup d'encouragement pour leurs futurs travaux et qu'ils puissent aussi se convaincre que la dure simplicité s'arrache par le travail et la persévérance.

Désormais la résille des tétraèdres qui groupe les 27 genres de tétraèdres sans omission ni répétition et de telle manière que deux liaisons ne soient jamais croisées sera notre référence essentielle. Nous verrons bientôt que cette même résille, considérée dans son ensemble sera par la suite l'élément fondamental des représentations symboliques qui caractérisent l'ensemble des formes des divers angles tétraèdres.

En examinant soigneusement cette résille on voit que tous les tétraèdres qu'on peut identifier, soit en connaissant le nombre et la disposition de leurs dièdres obtus ( $\alpha$  et  $\gamma$ ), soit en connaissant le nombre et la disposition de leurs faces obtuses ( $\nu$ ",  $\mu$ ",  $\sigma$ ",  $\theta$ ,  $\nu$ ,  $\psi$ ,  $\omega$ ) (1) sont en positions excentriques. Ils représentent une originalité de structure telle qu'ils ne peuvent être qu'en positions terminales.

---

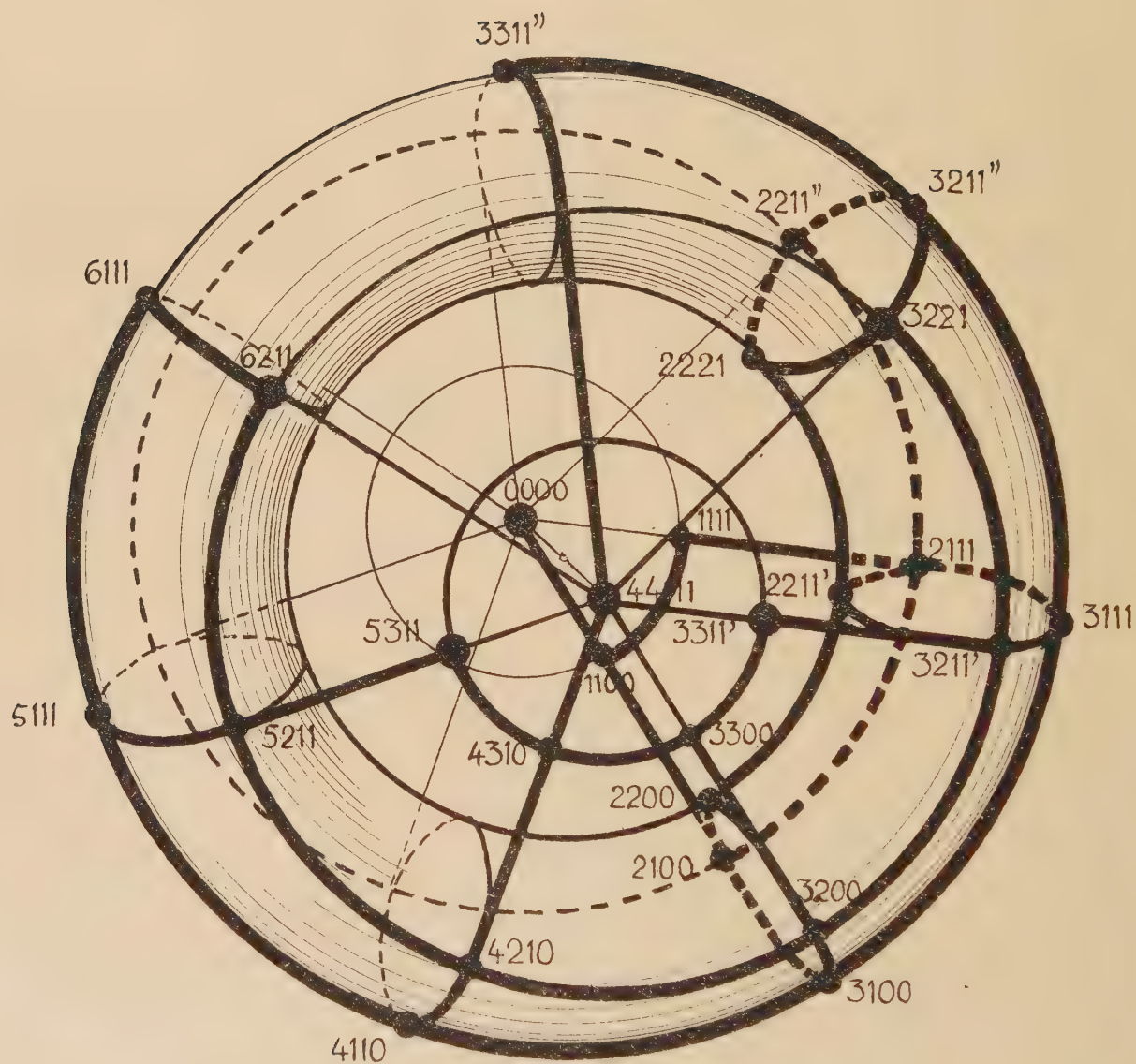
(1) Pour identifier  $\sigma$ " il faut, non seulement, savoir qu'il a 4 faces obtuses du type 22, mais que le dièdre commun aux deux trièdres possédant ces faces obtuses est aigu.





Résille généalogique des tétraèdres  
sous forme d'un filet pour tore

X



Montrons que sous une forme très condensée la résille illustre de manière frappante les liens étroits qui unissent certains genres de tétraèdres.

Tout d'abord nous reconnaissons les 6 genres de tétraèdres n'ayant qu'un dièdre obtus; ils sont liés au genre  $\alpha$  qui a tous ses dièdres aigus.

Le groupe important des 11 genres de tétraèdres ayant deux dièdres obtus opposés s'isole facilement. Il se présente élégamment sous la forme d'un cube dont trois arêtes auraient été prolongées. On reconnaît ensuite le petit groupe des 3 genres de tétraèdres ayant deux dièdres obtus concourants, puis les 5 genres de tétraèdres ayant trois dièdres obtus appartenant au même trièdre et enfin, le dernier, le genre  $\gamma$ , qui a trois dièdres obtus deux à deux concourants.

Si l'on représente par un point l'ensemble des genres ayant même nombre de dièdres obtus et même disposition de ces genres on obtient un graphe très simple (fig.50). La résille n'est que l'épanouissement de ce graphe; mais les six points qui le déterminent reçoivent des développements si différents qu'on a peine à le reconnaître.

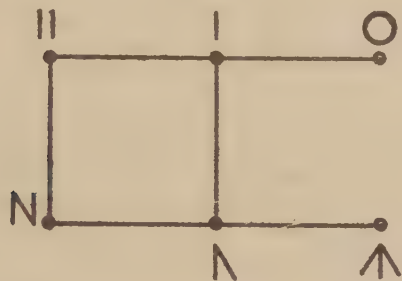


Fig.50

Considérons maintenant l'ensemble des 6 genres de tétraèdres n'ayant qu'un dièdre obtus; montrons qu'ils constituent, avec le genre  $\gamma$ , la souche fondamentale sur laquelle il est facile de construire la résille toute entière,

à la seule condition d'avoir bien présente à l'esprit la classification des trièdres et le fait qu'un tétraèdre ne peut pas avoir plus de trois dièdres obtus et de quatre faces obtuses.

Quand un trièdre a un seul dièdre obtus, il peut avoir 0, 1 ou 2 faces obtuses. Il y a six combinaisons de ces trois nombres pris deux à deux, avec ou sans répétition. Ces six possibilités sont justement réalisées pour les six tétraèdres ayant un seul dièdre obtus: Soit ABCD l'un quelconque de ces tétraèdres, et AB l'arête du seul dièdre obtus. On ne pourra enrichir ce tétraèdre en éléments obtus qu'en lui ajoutant un dièdre obtus. 1° - Supposons que CD soit l'arête d'un nouveau dièdre obtus; la résille montre que ceci est réalisable pour tous les genres ayant un dièdre obtus, de sorte qu'aux genres  $\beta, \delta, \zeta, \epsilon, \lambda, \xi$  on peut faire correspondre les genres  $\gamma, \epsilon, \eta', \kappa, \mu', \theta'$ . Il résulte de ce qui précède que les 12 genres précédents n'ont, au plus, que deux trièdres comportant des faces obtuses.

Le dièdre CD peut acquérir en outre de nouveaux éléments obtus, sous forme de faces; mais il se trouve limité par le nombre des faces obtuses relatives au dièdre AB, ainsi  $\theta'$  qui a quatre faces obtuses est hors de cause et  $\gamma$  également qui ne pourrait en acquérir une qu'en devenant  $\xi$ . Les

genres  $\varepsilon, \eta', \kappa, \mu'$  peuvent recevoir chacun une face obtuse de plus opposée à l'arête du dièdre CD. On retrouve avec  $\eta''$  et  $\mu''$  une formule de trièdres analogue à celle de  $\eta'$  et de  $\mu'$  mais avec une disposition structurale différente et deux nouveaux genres  $\theta$  et  $\psi$ . Pour la première et pour la dernière fois les faces obtuses de ces deux derniers tétraèdres sont réparties sur trois trièdres différents.

Le genre  $\psi$  a 4 faces obtuses, il ne saurait en acquérir de nouvelles; mais rien ne semble s'opposer à ce que  $\theta$  en acquière une quatrième; nous avons montré que le genre 2222 ne peut être construit. Si  $\eta''$  avait une face obtuse de plus on retrouverait  $O$  ou  $\mu''$ ; mais  $\mu''$  peut avoir une 4<sup>e</sup> face obtuse sous la forme du genre  $\psi$  mais aussi sous la forme du genre  $o''$ , avec une structure différente de celle de  $O'$ . Le genre  $O''$  ne peut plus acquérir de nouvelle face obtuse mais il peut recevoir un dièdre obtus de plus et devenir de genre  $\tau$ .

2°- Si nous revenons aux tétraèdres n'ayant qu'un dièdre obtus (AB) on sait que si le trièdre A a deux faces obtuses, il peut recevoir un, deux ou trois dièdres obtus. Les tétraèdres  $\beta, \delta, \gamma$  s'éliminent d'eux même; mais les tétraèdres  $\iota, \lambda, \xi$  donnent successivement les genres  $\pi, \rho, \sigma$ ;  $\upsilon, \phi, \chi$ .

Le genre  $\chi$  qui a 4 faces obtuses ne peut en acquérir de nouvelles mais  $\sim$  et  $\phi$  qui n'en ont que 2 et 3 peuvent en recevoir chacun une de plus en devenant  $\psi$  et  $\omega$ . Le genre  $\omega$  a son maximum de faces obtuses et  $\psi$  ne peut en acquérir une de plus qu'en devenant  $\omega$ . L'originalité essentielle de la résille est que le genre  $\tau$ , étroitement lié à  $O''$ , l'est aussi à  $\sigma$  qui peut lui aussi, recevoir un dièdre obtus de plus. Le genre  $\tau$  est véritablement le pont entre deux groupes de tétraèdres de structures très différentes. Nous pourrions dans le chapitre suivant, montrer comment on peut passer continûment du genre  $O'$  au genre  $O''$  par l'intermédiaire du genre  $\tau$ . Ce sera une intéressante illustration de ce que théoriquement l'étude de la résille permet de prévoir (1)

---

(1) voir page 76.

### CHAPITRE III

#### I - TETRAEDRES PARTICULIERS

##### 1°) Tétraèdres orthocentriques

Nous avons vu que les seuls genres possibles sont 6111 et 0000, avec comme type de transition le tétraèdre orthocentrique ayant l'un de ses trièdres trirectangle. De 27 genres on passe donc brutalement à 2, et l'on sait qu'il suffit pour qu'un tétraèdre soit orthocentrique que l'un de ses sommets se projette orthogonalement sur l'orthocentre de la face opposée.

Nous allons montrer maintenant, en utilisant ces résultats, que nous pourrions mettre en évidence le caractère incorrect de certains énoncés de problèmes, nous étudierons successivement deux énoncés. Nous y insisterons d'autant plus volontiers que le départ de tout notre travail a été justement de découvrir le caractère aventureux d'un problème donné au Concours général.

Le doute ne se serait peut être jamais insinué dans notre esprit si nous n'avions entendu Monsieur BLUTEL, en 1932, expliquer à l'un de nos élèves que si un trièdre isocèle a ses deux faces égales obtuses les projections orthogonales de ses arêtes sur la face opposée ne sont pas disposées de la même manière que si les deux faces égales sont aiguës.

Voici donc l'énoncé du premier de ces problèmes: "Dans tout trièdre les plans perpendiculaires aux faces issues de l'arête opposée ont une droite commune. (Couper par un plan perpendiculaire à l'intersection SH des deux premiers plans dont parle l'énoncé)" (1)

L'existence de la droite SH est facile à mettre en évidence; mais nous nous sommes posé la question suivante: Est-on sûr que le plan perpendiculaire à SH qui coupe en général les trois droites SA, SB, SC coupe aussi les trois arêtes des trièdres S'? Il nous a paru possible que l'énoncé ne soit pas valable pour n'importe quel trièdre. Ce doute nous a conduit à étudier la classification des trièdres en comparant leurs éléments dièdres et faces à l'angle droit. Mais, en outre, la méthode suggérée par l'énoncé incite à traiter le problème sous la forme suivante:

"Etant donné un trièdre SABC le couper par un plan tel que le tétraèdre SABC soit orthocentrique".

Sous cette forme nous étions obligés non seulement de classer les

---

(1) Brachet Dumarqué: Précis de Géométrie dans l'espace n°91 p.161 1929 (Delagrave, éditeur)

trièdres, mais d'étudier aussi les genres possibles des tétraèdres orthocentriques.

Sept genres de trièdres, deux genres seulement de tétraèdres orthocentriques, il y a de quoi réfléchir et comment de ne pas se poser la question: "Si le tétraèdre n'était pas orthocentrique combien trouverait-on de genres?" Voilà le point de départ de cette longue étude.

Il nous est facile actuellement de déterminer dans quelles conditions l'énoncé précédent a un sens. Les seuls genres de trièdres qui peuvent former un tétraèdre orthocentrique sont 0,1,6; de sorte que si l'on se donne un trièdre de genre 2,3,4 ou 5 l'énoncé n'a pas de sens.

Abordons maintenant l'étude d'un problème donné autrefois au Concours général:

"On donne dans un plan P, un triangle ABC dont les hauteurs se rencontrent au point H. Soit  $\Delta$  la perpendiculaire menée du point H au plan P et M un point de cette droite. 1°) (partie complément indépendante de la 2e) - 2°) On construit le trièdre MA'B'C', supplémentaire du trièdre MABC (A',B',C' étant les traces des arêtes sur le plan P). Démontrer que les deux triangles ABC et A'B'C' sont homothétiques. Pour quelles positions du point M ces triangles sont-ils égaux? Inversement, étant donnés deux trièdres supplémentaires de même sommet, on propose de déterminer tous les plans qui coupent ces deux trièdres suivant deux triangles homothétiques les sommets homologues étant placés sur les arêtes correspondantes". (1)

Les trièdres MABC et MA'B'C' sont supplémentaires: les tétraèdres MABC et MA'B'C' sont orthocentriques. Il en résulte que le trièdre MABC ne peut être que de genre 0 ou 6, afin que le trièdre MA'B'C' soit de genre 6 ou 0. Le triangle ABC est donc obligatoirement acutangle; l'énoncé devrait le mentionner explicitement. On pourrait croire qu'il ne s'agit que d'un lapsus, l'énoncé faisant allusion au cas où les triangles ABC et A'B'C' sont égaux, ce qui entraîne que le trièdre MABC soit trirectangle, et ceci n'est possible on le sait bien que si le triangle ABC est acutangle.

Mais la dernière partie de l'énoncé montre que la difficulté fondamentale de possibilité du problème a échappé à son auteur. En effet, la réciproque n'a de sens que si les deux trièdres supplémentaires sont de genres 0 et 6; ceci entraîne du reste que le triangle ABC soit acutangle.

Si extraordinaire que cela puisse paraître, l'énoncé du problème donné en 1923 au Concours général, bien que n'ayant pas été résolu dans le Journal de Mathématiques élémentaires, a été repris à Strasbourg en Juin 1931 (1ère partie A, A', B) mais l'énoncé se limite fort heureusement, au théorème direct; il serait devenu parfaitement correct si l'on avait simplement supposé que le triangle ABC est acutangle.

Pour bien montrer le caractère exceptionnel des résultats trouvés pour les tétraèdres orthocentriques nous allons étudier maintenant le nom-

---

(1) Concours général 1923 (1ère C et D)

bre de genres de quelques tétraèdres particuliers que nous nous efforcerons de choisir intéressants pour eux-mêmes.

## 2°) Tétraèdres équi-faces.

Tous les trièdres de ces tétraèdres sont égaux de sorte que leurs genres ne peuvent être que llll et OOOO; on peut montrer qu'ils sont effectivement réalisables. Tous ces tétraèdres sont limités par des facettes acutangles: on retrouve un théorème élémentaire classique.

Il semble qu'on soit en présence d'une limitation aussi brutale que pour les tétraèdres orthocentriques, il n'en est rien. En effet, si l'on se donne un triangle ABC quelconque, il existe à partir de lui une infinité de tétraèdres orthocentriques ayant le triangle ABC comme facette, tandis que si l'on se donne un triangle ABC acutangle il n'existe qu'un tétraèdre équi-face correspondant. On peut, du reste, mettre en évidence une correspondance intéressante entre un tétraèdre équi-face et un tétraèdre possédant un trièdre trirectangle.

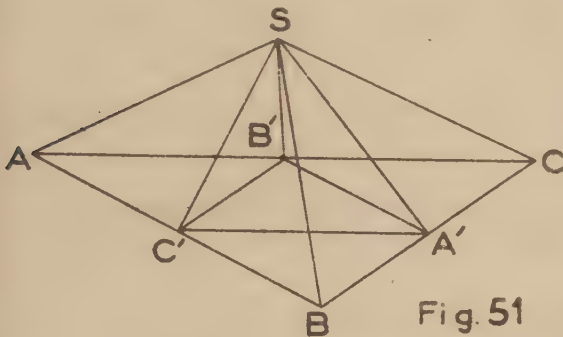


Fig. 51

Soit SABC un tétraèdre le trièdre S étant trirectangle (on sait que le triangle ABC est acutangle). Soient A', B', C' les milieux des côtés du triangle ABC. On a  $SA' = B'C'$ ;  $SB' = C'A'$ ;  $SC' = A'B'$ . Le tétraèdre SA'B'C' est donc équi-face.

Donc si on déplace le point S sur la droite perpendiculaire au plan ABC au point H, orthocentre de ce triangle, parmi tous les tétraèdres orthocentriques qu'on peut obtenir, au seul tétraèdre orthocentrique possédant en S un trièdre trirectangle correspond le seul tétraèdre équi-face qu'on puisse construire sur le triangle A'B'C' et qui a S comme sommet.

On démontre facilement, les triangles A'B'C' et ABC étant homothétiques, que l'orthocentre du triangle ABC est le symétrique de l'orthocentre H' du triangle A'B'C' par rapport au centre du cercle circonscrit au triangle A'B'C'. Tout ceci nous suggère de considérer des tétraèdres que nous proposons d'appeler paraéqui-faces (1).

## 3°) Tétraèdres paraéqui-faces (1)

Définition: Un tétraèdre sera dit paraéqui-face si l'un de ses sommets S se projette orthogonalement sur le plan de la facette opposée ABC, en un point qui est le symétrique de l'orthocentre du triangle ABC par rapport au centre du cercle circonscrit au triangle.

Ces tétraèdres ont des propriétés géométriques simples que nous étudierons ultérieurement, lorsque nous compléterons cette étude. Pour l'instant nous nous contenterons de signaler le nombre de leurs genres qui est considérable:

(1) Glossaire

6111 , 5111, 4110, 3100, 2100, 1100, 0000  
3111 , 2111, 1111  
2221

Soit au total onze genres (planche XI).

#### 4°) Tétraèdres isocèles I(S) (1)

Définition: Ce sont des tétraèdres possédant 3 arêtes égales issues du sommet S.

Il résulte de cette définition que la projection orthogonale de S sur le plan de la face ABC se fait sur le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. On aura donc deux cas à distinguer suivant que le triangle ABC est acutangle ou obtusangle.

Il y a en définitive dix genres (planche XI)

6111 , 5111 , 4110, 3100, 2100, 1100, 0000  
3211', 2211', 2111

Pour les sept premiers genres le triangle ABC est acutangle, il est obtusangle dans les trois autres cas.

Ces tétraèdres jouent un rôle important dès qu'on s'intéresse aux sphères inscrites et ex-inscrites à un tétraèdre. (voir note p.111).

#### 5°) Tétraèdres isocèles II (S) (1)

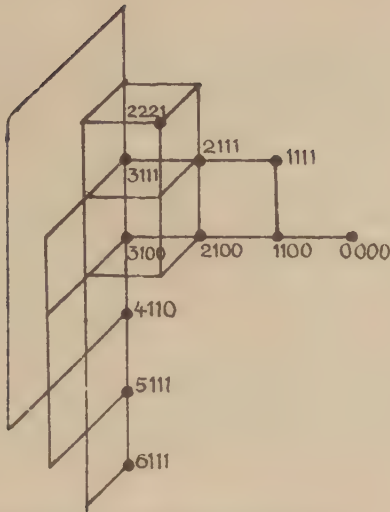
Définition : Ce sont des tétraèdres ayant 3 dièdres égaux dont les arêtes forment les cotés d'une même facette opposée à S.

Il résulte de cette définition que la projection orthogonale de S sur le plan ABC est le centre du cercle inscrit au triangle ABC.

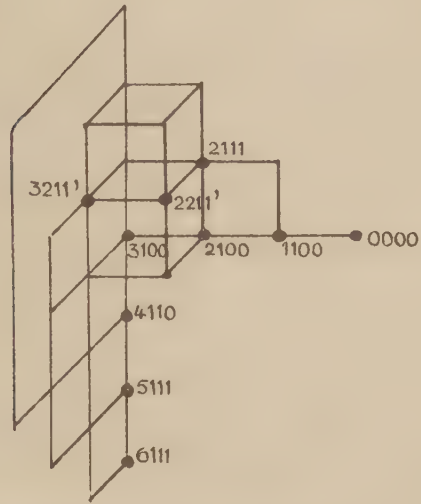
On constate qu'il y a douze genres: (planche XI)

6111, 5111, 4110, 3100, 2100, 1100, 0000  
6211, 5211, 4210, 3200, 2200

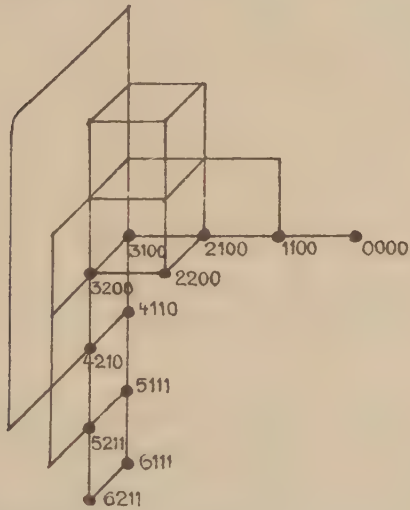
Pour tous les tétraèdres remarquables que nous venons d'examiner nous nous sommes donné arbitrairement l'une des facettes, le triangle ABC, et nous avons supposé en outre que le quatrième sommet du tétraèdre S se projette orthogonalement sur le plan ABC en un point déterminé dès que le triangle ABC est connu. Nous avons utilisé successivement l'orthocentre du triangle, le symétrique de l'orthocentre par rapport au centre du cercle circonscrit au triangle, le centre du cercle circonscrit au triangle, le centre du cercle inscrit dans le triangle. Nous nous limiterons à ces quatre cas; ils mettent bien en évidence le caractère exceptionnel des tétraèdres orthocentriques.



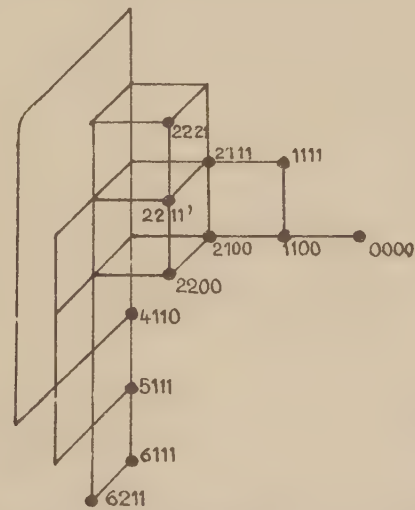
Tétraèdres paraéquifaces



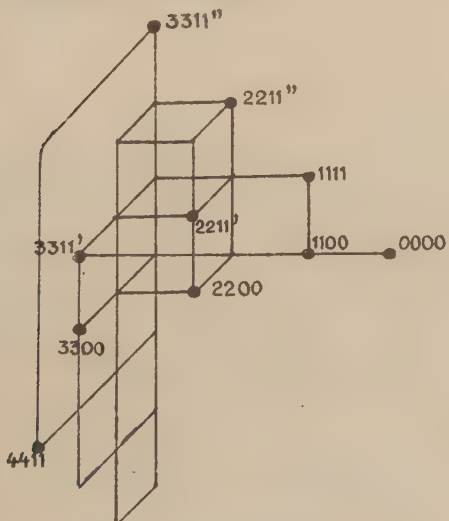
Tétraèdres Isocèles I



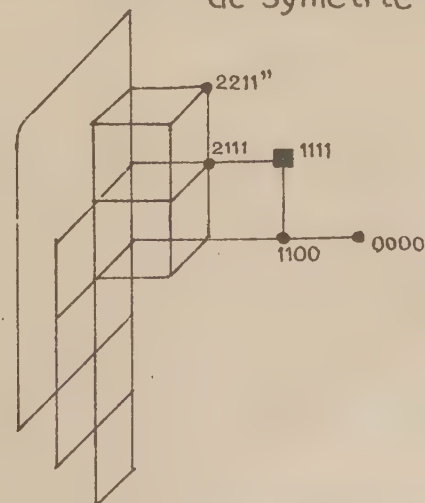
Tétraèdres Isocèles II



Tétraèdres possédant un plan de symétrie



Tétraèdres possédant un axe binaire



Position du centre O de la sphère-circoscrite

Sans doute cette limitation brutale des formes explique-t-elle l'analogie qui existe entre les triangles quelconques et les tétraèdres orthocentriques.

Tout d'abord, il est connu qu'un tétraèdre orthocentrique, qui a son orthocentre intérieur, est décomposable en quatre tétraèdres orthocentriques chacun d'eux ayant comme orthocentre le cinquième sommet inutilisé (1)

Nous dirons maintenant de manière plus précise que chaque tétraèdre orthocentrique de genre 0000 est décomposable, en utilisant son orthocentre, en quatre tétraèdres de genres 6lll, exactement comme un triangle acutangle se décompose à l'aide de son orthocentre en trois triangles obtusangles. On sait, en outre, qu'en géométrie plane, si un triangle est conjugué par rapport à un cercle il est forcément obtusangle et le centre du cercle est son orthocentre. Or, en géométrie de l'espace, si un tétraèdre est conjugué par rapport à une sphère, il doit d'abord être orthocentrique et ensuite de genre 6lll puisque son orthocentre doit lui être extérieur, en outre l'orthocentre est le centre de la sphère.

Nous nous limiterons à ces deux exemples: ils convergent pour nous montrer que les tétraèdres orthocentriques de genre 0000 jouent le rôle de triangles acutangles et les tétraèdres orthocentriques de genre 6lll le rôle de triangles obtusangles. Enfin, on ne saurait oublier que les propriétés du cercle d'Euler et de la droite d'Euler ne s'étendent qu'aux tétraèdres orthocentriques.

#### 6°) Tétraèdres présentent un plan de symétrie.

Nous avons déjà signalé les trièdres pouvant présenter un plan de symétrie. Le fait saillant est que seul le trièdre de genre 3 ne peut avoir de plan de symétrie.

Un tétraèdre pourra présenter un plan de symétrie si deux de ses trièdres ont même genre et si les deux trièdres restants peuvent avoir un plan de symétrie passant par leur arête commune. Il en résulte que tout tétraèdre contenant dans sa formule le genre 3, une fois seulement ne pourra avoir de plan de symétrie. Il y a trois genres de tétraèdres possédant deux trièdres de genre 3, se sont:

3300 , 3311' , 3311"

L'arête joignant les trièdres de genres 3 ne peut contenir le plan de symétrie d'après ce qui précède de sorte qu'il faut chercher si le plan médiateur de l'arête 33 peut être plan de symétrie. Il est facile de voir que c'est impossible pour les trièdres 3300 et 3311' parce que leurs faces obtuses ne peuvent être symétriquement placées par rapport à ce plan médiateur: enfin s'il s'agit du tétraèdre 3311" l'arête 33 est celle d'un dièdre aigu et les deux dièdres obtus du tétraèdre ne seraient pas symétriquement placés par rapport au seul plan de symétrie possible. Il convient

(1) Voir P. COUDERC et A. BALLICIONI - Premier livre du Tétraèdre 1935 - Gauthier-Villars p.127

donc de supprimer dans la liste des 27 genres tous les tétraèdres possédant un ou plusieurs trièdres de genre 3: ils sont au nombre de 11. L'étude minutieuse que nous avons faite de la disposition des éléments obtus de 5211 prouve ce genre ne peut avoir de plan de symétrie. La disposition de ses dièdres obtus interdit aussi à 4411 d'avoir un plan de symétrie; le genre 4210 n'a pas de plan de symétrie ses trièdres étant tous de genres différents; enfin 2211" ne peut en avoir à cause de la disposition de ses faces obtuses; tous les genres restants, au nombre de 12, peuvent avoir un plan de symétrie, ce sont:

6211, 6111, 5111, 4110, 2221, 2211', 2200, 2111, 2100, 1111, 1100, 0000 (Planche XI).

On peut prouver rigoureusement que tous ces cas possibles sont effectivement réalisables par la méthode suivante dont nous n'indiquerons que le principe. Soit SA le dièdre variable d'un tétraèdre les points S et A étant arbitraires. Nous nous donnerons en outre les triangles SAB et SAC

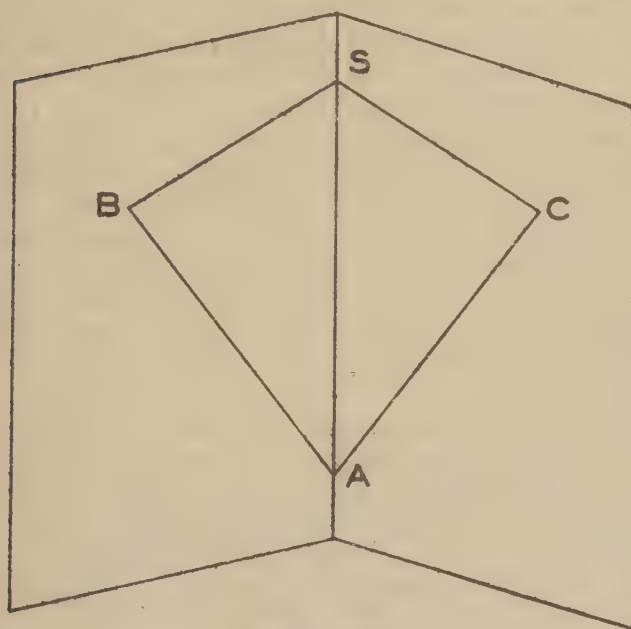


Fig. 51

supposés symétriquement placés par rapport au plan bissecteur du dièdre SA pour une valeur déterminée de ce dièdre (fig. 52). Si maintenant on fait croître le dièdre SA de 0 à  $\pi$  sans toucher aux triangles SAB et SAC, tous les tétraèdres obtenus auront le plan bissecteur de SA comme plan de symétrie. On conçoit dans ces conditions que si les triangles SAB et SAC prennent toutes les formes possibles (acutangle, obtusangle en S ou en A) on puisse caractériser tous les tétraèdres ayant un plan de symétrie. La discussion est intéressante; mais trop longue pour que nous puissions la reproduire.

En outre on peut montrer que les tétraèdres suivants peuvent avoir deux plans de symétrie utilisant deux arêtes opposées, ce sont:

2211', 2200, 1111, 1100, 0000 (de 3 manières différentes)

Considérons maintenant les tétraèdres présentant deux plans de symétrie passant par un même sommet de tétraèdre; il est facile de voir que ce sont des tétraèdres ayant comme base un triangle équilatéral. Ils auront donc un troisième plan de symétrie et par suite un axe ternaire; il est facile de voir que ces tétraèdres sont orthocentriques. Leurs genres sont:

6111 et 0000 (ce dernier avec 6 plans de symétrie possibles et 4 axes ternaires possibles)

#### 6°) Tétraèdres possédant un axe binaire de symétrie.

Les trièdres de tels tétraèdres doivent avoir leurs genres égaux

deux à deux. On constate aisément que 10 cas sont possibles. Ce sont :

4411, 3311', 3311'', 3300, 2211', 2211'', 2200, 1111, 1100, 0000  
(Planche XI)

On peut prouver rigoureusement que tous ces cas possibles sont effectivement réalisables par la méthode suivante dont nous n'indiquerons que le principe.

Soit un tétraèdre ABCD qui a un axe binaire supposé perpendiculaire commune aux arêtes AD et BC et coupant par suite AD en son milieu M et BC en son milieu N. On pose  $AD = 2a$   $BC = 2b$  ( $a > b$ ) on désigne par

$\alpha$  ( $\alpha < \frac{\pi}{2}$ ) l'angle des droites AD et BC et par  $l$  la distance MN.

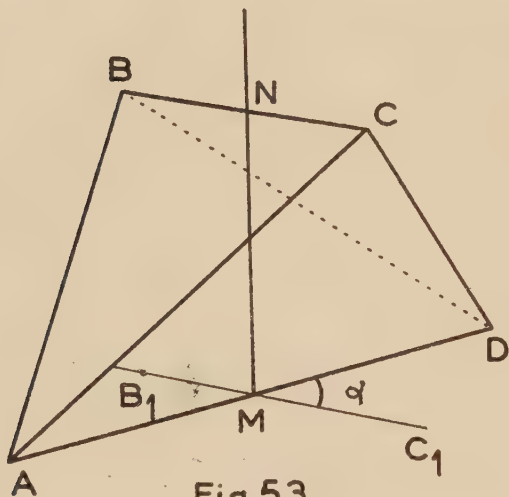


Fig.53

Si maintenant on suppose AD fixe,  $l$  variant de 0 à l' $\infty$  de sorte que N décrive la perpendiculaire commune à AD et BC, BC restant parallèle à elle-même, on déterminera pour chaque valeur de  $l$  ( $a, b, \alpha$  étant donnés à l'avance) un tétraèdre possédant un axe binaire. Le genre de ce tétraèdre variera suivant la valeur du paramètre variable  $l$  et ensuite suivant les valeurs de  $a, b$ , et  $\alpha$ . La discussion, pleine d'intérêt, est trop longue pour que nous puissions la reproduire.

Nous signalerons seulement le fait suivant. Considérons la résille des tétraèdres, nous savons que l'une des mailles de cette résille est un octogone, 4 des sommets de cet octogone sont justement des tétraèdres pouvant présenter un axe binaire : 4411, 3311', 3311'', 3300. Si  $b < a \cos \alpha$  et qu'on fasse croître  $l$  on constate qu'on trouve successivement les genres :

3311', 3300, 4411, 3311'', 2211''

ce que l'examen attentif de la résille pouvait faire prévoir puisqu'on ne peut passer directement de 3311' à 3311''. Pour passer continuellement de la forme initiale à la forme finale le tétraèdre qui a deux dièdres obtus opposés et une certaine disposition de faces obtuses doit perdre d'abord un de ses dièdres obtus, puis en acquérir deux nouveaux et, pour terminer, perdre enfin le dernier des dièdres obtus qu'il avait initialement, ceci,



Fig.54

pendant que les faces obtuses, au nombre de 4, groupées deux par deux, restent invariablement attachées aux mêmes trièdres.

Remarquons en terminant que les tétraèdres de genres llll et 0000 peuvent avoir trois axes binaires. On retrouve bien pour le tétraèdre régulier, en groupant toutes ces possibilités de symétrie: 6 plans de symétrie, 4 axes ternaires, 3 axes binaires.

## II - CENTRE DE LA SPHERE CIRCONSCRITE A UN TETRAEDRE

On sait que si l'on considère les quatre plans qui déterminent un tétraèdre ils partagent l'espace en 15 régions (1):

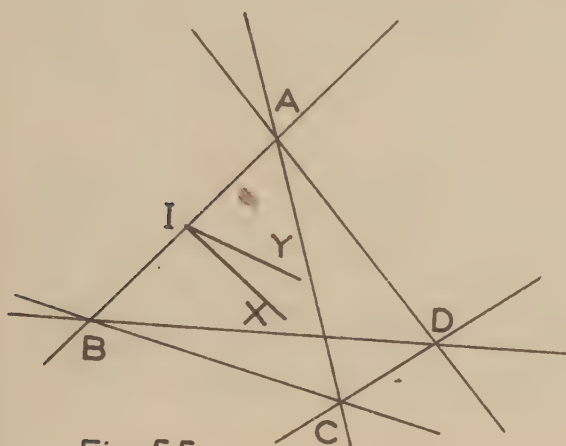


Fig.55

- 1° - l'intérieur du tétraèdre: région i
- 2° - les quatre trièdres tronqués obtenus en retirant d'un trièdre le tétraèdre lui-même: régions e.
- 3° - les quatre trièdres opposés par le sommet à ceux du tétraèdre: régions p.
- 4° - Les six combles opposés, par l'arête à chaque dièdre du tétraèdre: régions c.

Désignons par O le centre de la sphère circonscrite à un tétraèdre: nous nous proposons d'étudier dans quelles conditions O est intérieur ou extérieur au tétraèdre. Tout d'abord il est facile de démontrer que O ne peut se trouver

dans une région p. Si O est situé dans la région i il est intérieur aux 6 dièdres du tétraèdre. Si O passe de la région i à une région e (par exemple relative au trièdre A), ce qui suppose que O traverse le plan BCD, O reste intérieur aux trois dièdres du trièdre A et devient extérieur aux dièdres BC, CD, DB du tétraèdre. Si O passe maintenant de cette région e à la région c (relative au dièdre CD) il reste intérieur au seul dièdre AB et extérieur aux cinq autres dièdres du tétraèdre.

En résumé si O est situé dans la région i, il est intérieur aux six dièdres du tétraèdre; s'il est situé dans une région e, il est intérieur aux trois dièdres d'un même trièdre et extérieur aux trois autres, enfin s'il est dans une région c il est intérieur à un seul dièdre du tétraèdre et extérieur aux cinq autres dièdres.

Dans ces conditions il suffit que O soit extérieur à un dièdre du tétraèdre pour être surement extérieur au tétraèdre, sans qu'on puisse, en

(1) P. COUDERC et A. BALLICIONI: Premier livre du Tétraèdre 1935, Gauthier Villars p. 71 et 72.

général, préciser immédiatement s'il s'agit d'une région  $e$  ou d'une région  $o$ . Par contre si  $O$  est intérieur à un dièdre du tétraèdre on ne peut conclure; mais nous allons démontrer que si  $O$  est intérieur à deux dièdres opposés du tétraèdre il est sûrement intérieur au tétraèdre.

Supposons, pour fixer les idées, que  $O$  soit intérieur aux dièdres,  $AB$  et  $CD$ . Etant intérieur au dièdre  $CD$ ,  $O$  ne pourra être situé dans les régions  $e$ , relatives aux trièdres de sommets  $A$  et  $B$ ; de même, étant intérieur au dièdre  $AB$ ,  $O$  ne pourra être situé dans les régions  $e$  relatives aux trièdres de sommets  $C$  et  $D$ ; enfin  $O$  ne pourra être situé dans une région  $o$  puisqu'il est intérieur à deux dièdres au lieu de l'être à un seul. Comme il ne peut être situé dans une région  $p$ ,  $O$  est sûrement intérieur au tétraèdre.

Indiquons maintenant brièvement comment nous avons pu étudier la position de  $O$  par rapport à un dièdre donné du tétraèdre, le dièdre  $AB$  par exemple (fig. 55). Considérons le plan médiateur de  $AB$ , lequel coupe le dièdre suivant son rectiligne  $XIY$ . Il y aura deux cas suivant que le dièdre est aigu ou obtus, puisque nous réservons le cas du dièdre droit.

Commençons par supposer que le dièdre  $AB$  est aigu. Supposons que les triangles  $CAB$  et  $DAB$  sont acutangles: dans ces conditions on sait que le centre du cercle circonscrit au triangle  $ABC$  est situé sur la demi-droite  $IX$  et que le centre du cercle circonscrit au triangle  $ADB$  est situé sur la demi-droite  $IY$ . Si donc on trace des hachures perpendiculaires à la droite  $IX$  et dont les pieds sont situés sur la demi-droite  $IX$  et qu'on opère de la même manière pour  $IY$ , on détermine ainsi une région doublement hachurée qui contiendra  $O$  (fig. 56, I). Ce premier cas ne permet pas de conclure:  $O$  peut être intérieur ou extérieur au dièdre  $AB$ .

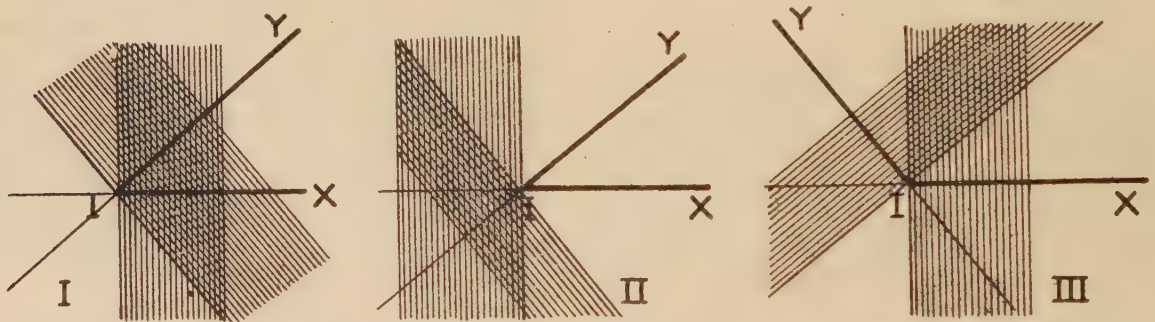


Fig. 56

Si l'on suppose maintenant que le dièdre  $AB$  étant toujours aigu les angles  $ACB$  et  $ADB$  sont tous deux obtus, on voit que  $O$  est sûrement extérieur au dièdre  $AB$ . (fig. 56, II).

Supposons maintenant le dièdre  $AB$  obtus et les triangles  $ABC$  et  $ABD$  acutangles, on voit que  $O$  est sûrement intérieur au dièdre  $AB$  (fig. 56, III).

Ces trois exemples montrent qu'on peut prévoir par une étude systématique, utilisant simplement le fait qu'un dièdre est aigu ou obtus,

et qu'une facette d'un tétraèdre est acutangle ou obtusangle, si  $O$  est extérieur au tétraèdre considéré. Il y a 27 genres de tétraèdres; dans 22 cas on peut prouver ainsi que  $O$  est sûrement extérieur au tétraèdre. En outre le genre  $\gamma$  (llll) n'ayant comme seuls éléments obtus que deux dièdres opposés, il en résulte que  $O$ , pour un tel genre, est intérieur à chacun des deux dièdres obtus et, par suite, est sûrement intérieur au tétraèdre.

Il reste quatre genres:  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\varepsilon$  et  $\eta$  "pour lesquels il y a doute (planche XI). Pour lever ce doute il faut reprendre l'étude des régions (planche IV) pour un triangle ABC de base acutangle. On doit étudier la position de la sphère qui admet pour grand cercle le cercle ABC, par rapport aux régions de l'espace pour lesquelles, on trouve des tétraèdres des genres  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\varepsilon$ ,  $\eta$  ". On peut démontrer ainsi que, pour ces genres,  $O$  peut être intérieur ou extérieur au tétraèdre. Les résultats définitifs de toute cette discussion sont donc simples mais véritablement inattendus: le fait que  $O$  est intérieur au tétraèdre est tout à fait exceptionnel; le cas normal est celui où  $O$  est extérieur au tétraèdre.

Nous avons du reste l'intention de compléter ultérieurement cette étude, nous montrerons que si  $O$  est extérieur au tétraèdre, il est parfois possible de préciser immédiatement s'il est situé dans un trièdre tronqué ou dans les combles; mais, lorsqu'il y a doute, une étude délicate et minutieuse sera de nouveau nécessaire.

Nous avons insisté sur la résolution de ce problème parce que la connaissance du genre d'un tétraèdre permet de conclure immédiatement dans 23 cas sur 27, ce qui montre l'intérêt de la classification.

Nous voulons aussi, en terminant, montrer que la considération des positions relatives du centre de la sphère circonscrite à un tétraèdre et du tétraèdre même s'introduisent naturellement dans des problèmes très différents d'une étude systématique comme la nôtre.

En 1933, M. Lucien CHAMARD, dans sa thèse de Doctorat (1) en 1943, M. René LAGRANGE dans un mémoire paru au Bulletin des Sciences mathématiques (2) ont été amenés à s'intéresser à cette question alors qu'ils étudiaient un ensemble ponctuel borné. Cette convergence de deux études complètement indépendantes, mais se rattachant à la géométrie des ensembles n'est pas fortuite.

S'il s'agit d'un ensemble ponctuel borné, il est bien évident que les sous-ensembles formés de 2, 3, 4 points doivent s'introduire tout naturellement et que les sous-ensembles formés de 4 points, lesquels déterminent normalement un tétraèdre, doivent déjà être d'un assez grand intérêt puisqu'ils constituent une figure de l'espace et qu'ils offrent de ce fait même des possibilités plus riches que les sous-ensembles ne comportant que deux ou trois points.

---

(1) Lucien CHAMARD: Sur les propriétés de la distance à un ensemble ponctuel (édit. Marcel WATEZ, Bruxelles 1933).

(2) René LAGRANGE: Sur le tétraèdre et sur la sphère minimales contenant un ensemble de points. Bull. des Sciences Mathématiques, 2ème série, Tome LXVI, année 1943, édit. Gauthier Villars.

Voici sous sa forme la plus simple le théorème démontré par M. CHAMARD et par M. LAGRANGE:

Si le centre de la sphère circonscrite à un tétraèdre est intérieure à ce tétraèdre le plus grand côté du tétraèdre est au moins égal au côté du tétraèdre régulier inscriptible dans cette même sphère.

Monsieur LAGRANGE est même allé plus loin, dans la voie qui nous occupe puisqu'il a démontré dans ce même mémoire le théorème suivant que nous énonçons dans notre terminologie: Si le centre de la sphère circonscrite à un tétraèdre est intérieur à ce tétraèdre, deux au moins des facettes du tétraèdre sont acutangles.

Si l'on veut bien se reporter à la planche VI, on remarquera qu'il existe 12 genres de tétraèdres pour lesquels le nombre total de faces obtuses est inférieur ou égal à deux:

7 genres ont 2 faces obtuses,  
2 genres ont 1 face obtuse,  
3 genres ont 0 face obtuse.

Nos résultats sont donc plus précis que ceux de M. LAGRANGE. Seul le genre  $\gamma$  (2211) est à retenir parmi les tétraèdres qui ont deux faces obtuses, seul le genre  $\varepsilon$  (2111) est à retenir parmi ceux qui ont une face obtuse, enfin nous retenons les trois genres qui ont toutes leurs faces aiguës.

Nous avons en outre établi que, sauf pour le genre  $\gamma$  (1111), on ne peut affirmer qu'un tétraèdre de genre  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\varepsilon$ ,  $\gamma$  ait surement le centre de sa sphère circonscrite intérieur à ce tétraèdre.

Nous devons citer textuellement au passage du mémoire de M. LAGRANGE dont la dernière partie pourra être utilement précisée:

"Les trois projections orthogonales du centre du cercle circonscrit à un triangle sur les cotés appartiennent toujours au triangle; mais les projections du centre de la sphère circonscrite à un tétraèdre, sur les quatre faces de ce tétraèdre n'appartiennent pas toujours à ce tétraèdre; la projection sur une face est le centre du cercle circonscrit à cette face, et ne lui est intérieure que si cette face est un triangle aigu (1), et les 4 faces d'un tétraèdre ne sont simultanément aigus que si les douze angles des faces sont aigus, ce qui ne donne qu'une classe très particulière des tétraèdres non-obtus" (2).

Or nous avons démontré que le fait qu'un tétraèdre est limité par quatre triangles acutangles n'implique pas nécessairement qu'il soit un "tétraèdre non-obtus" sauf s'il est de genre  $\gamma$ .

---

(1) triangle acutangle

(2) tétraèdre non-obtus lorsqu'il contient, au sens strict, le centre de sa sphère circonscrite.

Nous ne nous permettons cette remarque que pour bien montrer combien les apparences peuvent être trompeuses dans des questions de ce genre.

Il est facile, du reste, d'illustrer d'un exemple, la dernière partie de cette étude. Construisons un tétraèdre régulier SABC et traçons la hauteur issue de S, soit H son pied. On sait que si I est le milieu de SH, le trièdre IABC est trirectangle; le centre de la sphère circonscrite à ce tétraèdre est extérieur au tétraèdre et facile à déterminer (fig. 57).

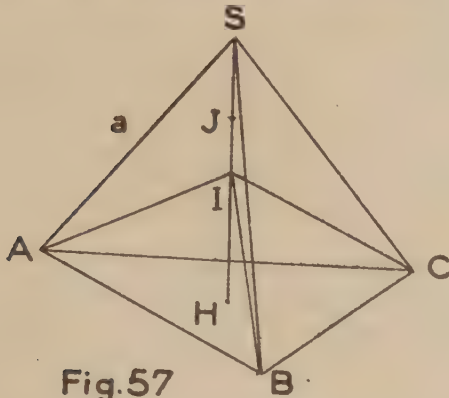


Fig.57

La sphère qui admet comme grand cercle le cercle circonscrit au triangle ABC est centrée en H, elle a comme rayon  $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

et coupera le segment SH en J.

$$HI = \frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}, \quad HJ = \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad HS = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

J est, comme on devait s'y attendre, située entre I et S. Si donc on prend un point  $\Sigma$  situé entre I et J, le tétraèdre correspondant sera de genre 0000, il aura donc toutes ses facettes acutangles et le centre de sa sphère circonscrite lui sera cependant sûrement extérieur (1).

(1) voir NOTE RELATIVE AUX TETRACANTHES p. 111



## CHAPITRE IV

### ANGLES TETRAEDRES

Commençons par montrer que la classification des angles tétraèdres est étroitement liée à celle des tétraèdres.

Considérons en effet un tétraèdre et les quatre plans qui le déterminent. Menons par un point  $O$  quelconque de l'espace les demi-droites issues de ce point et perpendiculaires à ces 4 plans; nous formons ainsi un angle tétraèdre.

Nous allons d'abord faire un inventaire systématique des différentes sortes d'angles tétraèdres.

Il existe naturellement des angles tétraèdres convexes et des angles tétraèdres non convexes. Ces derniers sont de deux sortes: les plus importants, que je propose de nommer les tétracanthes (1) et les autres que j'appellerai les tétracanthes inversés (1). Nous étudierons les propriétés caractéristiques des tétracanthes puis nous introduirons la notion d'angles tétraèdres convexes supplémentaires (1). Cette dernière étude simplifiera beaucoup l'identification des angles tétraèdres déduits d'un tétraèdre par la construction indiquée précédemment, identification qui sera liée au fait que le point  $O$ , sommet de l'angle tétraèdre sera placé dans l'une des quinze régions de l'espace déterminées par le tétraèdre.

### IDENTIFICATION DES DIVERSES SORTES D'ANGLES TETRAEDRES

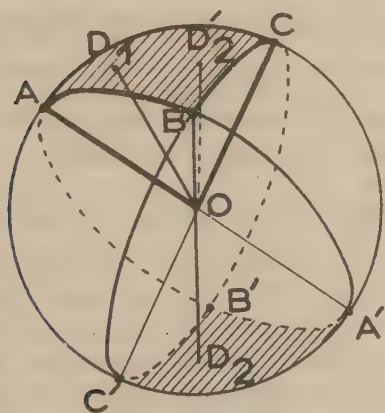


Fig.58

Considérons un triangle sphérique quelconque dessiné sur une sphère de centre  $O$ . Nous supposerons désormais le trièdre  $OABC$  fixe et nous tracerons en outre un rayon variable de la sphère  $OD$  pouvant occuper sur la sphère une position quelconque.

Les trois grands cercles de la sphère qui définissent le triangle sphérique partagent la sphère, s'ils sont entièrement dessinés, en 8 triangles sphériques dont les sommets sont  $A, B, C$  et  $A', B', C'$  symétriques de  $A, B, C$  par rapport à  $O$ . A ces 8 triangles sphériques correspondent les 8 trièdres déterminés par 3 droites concourantes non situées dans un même plan.

Désignons par  $i$  la région intérieure au triangle sphérique  $ABC$ , par  $e$  les régions intérieures aux trois triangles  $ABC'$ ,  $BCA'$ ,  $CAB'$ , par  $p$  les régions intérieures aux trois triangles  $AB'C'$ ,  $BC'A'$ ,  $CA'B'$ , enfin par  $\sigma$  la région intérieure au triangle  $A'B'C'$ .

Soit  $D_1$  un point pris dans la région  $i$ ; l'angle tétraèdre  $OABCD_1$  est caractérisé par les trois propriétés suivantes:

les arêtes  $OA$  et  $OD_1$  sont situées d'un même côté du plan  $BOC$   
 les arêtes  $OB$  et  $OD_1$  - - - - -  $COA$   
 les arêtes  $OC$  et  $OD_1$  - - - - -  $AOB$

Nous nommerons ultérieurement un angle tétraèdre de cette nature.

Soit  $D_2$  un point pris dans la région  $\sigma$ ; considérons l'angle tétraèdre  $OABCD_2$ . Si nous construisons le symétrique  $D'_2$  de  $D_2$  par rapport à  $O$ ,  $D'_2$  est intérieur à la région  $i$ , autrement dit, le prolongement de l'arête  $OD_2$ , au-delà de  $O$ , est intérieur au trièdre  $OABC$ .

Nous proposons de nommer tétracanthé (du grec tétra, quatre et akantha, épine) un angle tétraèdre tel que  $OABCD_2$ ; nous étudierons plus tard les propriétés d'une telle figure. Pour ne pas compliquer la terminologie nous proposons de nommer tétracanthé inversé un angle tétraèdre tel que  $OABCD$ .

Soit  $D_3$  un point pris dans une région  $e$ , celle qui est intérieure au triangle  $ABC'$ , l'angle tétraèdre  $OACBD_3$  est formé de deux trièdres accolés  $OACB$  et  $OAD_3B$  situés de part et d'autre de la face commune  $OAB$  et si l'on dessine l'arc de grand cercle passant par  $C$  et  $D_3$  qui coupe l'arc  $AB$  entre  $A$  et  $B$ , on peut aussi considérer l'angle tétraèdre  $OACBD_3$  comme formé de la juxtaposition des trièdres  $OCAD_3$  et

$OCBD_3$  de sorte que l'angle tétraèdre considéré est convexe. C'est une troisième forme d'angle tétraèdre.

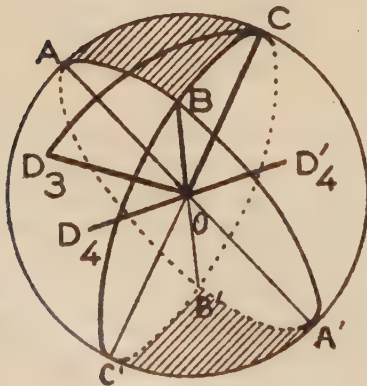


Fig. 59

Soit enfin  $D_4$  un point pris dans une région  $p$ , celle qui est intérieure au triangle  $A'B'C'$  par exemple. Etre dans une région  $p$  pour le triangle  $ABC$  ce serait être dans une région  $e$  pour le triangle  $A'B'C'$  de sorte que l'angle  $OB'A'C'D_4$  est convexe ce qui prouve que  $OBACD'_4$  l'est aussi en désignant par  $D'_4$  le symétrique de  $D_4$  par rapport à  $O$ . L'angle tétraèdre

$OBACD_4$  se déduit donc d'un angle tétraèdre convexe en substituant à une arête d'un angle tétraèdre convexe la symétrique de cette arête par rapport au sommet.

Il nous faut étudier la nature de ce nouvel angle tétraèdre.

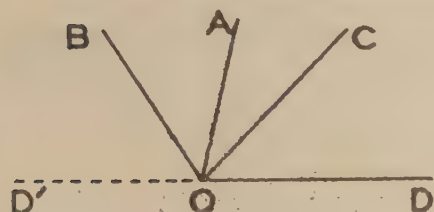


Fig.

Considérons un angle tétraèdre convexe  $OABCD$ ,  $OB$  et  $OD$  sont donc deux arêtes opposées de cet angle tétraèdre, prolongeons  $DO$  au delà de  $O$  en  $D'$  et considérons l'angle tétraèdre ayant  $OA, OB, OC, OD'$  comme arêtes.

Les arêtes  $OA$  et  $OB$  sont d'un même côté du plan  $COD$  puisque l'angle tétraèdre  $OABCD$  est convexe; donc  $OA$  et  $OB$  sont d'un même côté de la face  $COD'$  supposée prolongée.

De même  $OB$  et  $OC$  sont d'un même côté de la face  $AOD'$  pour la même raison.

Enfin  $OB$  et  $OD$  sont de part et d'autre du plan  $AOC$  puisque ce sont deux arêtes opposées d'un angle tétraèdre convexe donc  $OB$  et  $OD'$  sont d'un même côté par rapport à la face  $AOC$  supposée prolongée, dans ces conditions l'arête  $OB$  est intérieure au trièdre  $OACD'$ ; il s'agit donc encore d'un tétracanthe inversé.

Finalement il n'y a que trois sortes d'angles tétraèdres

|                   |                                   |
|-------------------|-----------------------------------|
| régions i et p :  | <u>tétracanthes inversés</u>      |
| régions e :       | <u>angles tétraèdres convexes</u> |
| région $\sigma$ : | <u>tétracanthe</u>                |

Montrons enfin que la propriété qui nous a servi à définir le tétracanthe est valable pour toutes ses arêtes.

#### PROPRIÉTÉ CARACTÉRISTIQUE D'UN TÉTRACANTHE

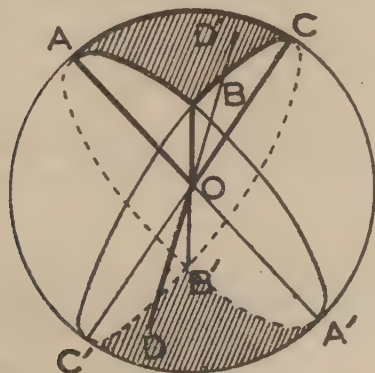


Fig. 60

Considérons un triangle sphérique  $ABC$  et un point  $D$  pris de la région  $\sigma$ , l'extrémité  $D'$  du diamètre  $DOD'$  est intérieure au triangle sphérique: l'angle tétraèdre  $OABCD$  est par définition un tétracanthe.  $D'$  étant intérieur au triangle sphérique  $ABC$ ,  $OD'$  est intérieur au trièdre  $OABC$ , donc perce le plan du triangle  $ABC$  à l'intérieur de ce triangle. Si on considère maintenant le tétraèdre  $DABC$ , le segment  $DD'$  perce le plan  $ABC$  à l'intérieur du triangle  $ABC$  est entièrement à l'intérieur du trièdre  $DABC$ , donc  $O$  est intérieur au tétraèdre  $DABC$  il en résulte que

si on prolonge  $AO$  au delà de  $O$  la demi droite ainsi obtenue  $OA'$  sera située à l'intérieur du trièdre  $OBED$  et de même pour les arêtes  $OB$  et  $OC$  prolongées.

gées au delà de O, donc les 4 arêtes d'un tétracanthe jouissent de la même propriété: toute arête prolongée au-delà du sommet est à l'intérieur du trièdre formé par les trois autres arêtes. Dès qu'un angle tétraèdre jouit de cette propriété pour l'une de ses arêtes elle est vraie pour les trois autres, et l'angle tétraèdre est un tétracanthe. Réciproquement si on considère un tétracanthe Oxyz et qu'on

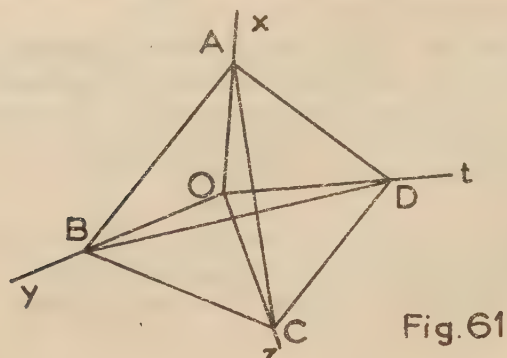


Fig. 61

porte sur ses arêtes les points A, B, C, D le fait qu'on sait que OA prolongée au delà de O est intérieure au triangle BCD prouve que O est intérieure au tétraèdre ABCD.

### ANGLES TETRAEDRES CONVEXES SUPPLEMENTAIRES.

Considérons un angle tétraèdre convexe OABCD.

Nous nous proposons de construire à partir de cet angle tétraèdre convexe un nouvel angle tétraèdre convexe de la manière suivante. Menons

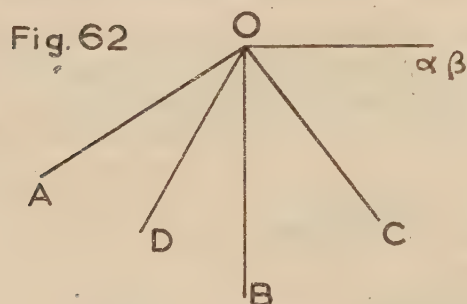


Fig. 62

$O\alpha\beta$  orthogonale à OA et à OB et du même côté que OC et OD par rapport au plan OAB, ce qui est possible puisque OABCD est convexe et ce qui entraîne que  $O\alpha\beta$  fait avec OC et avec OD des angles inférieurs, à 1 dr.

Etendons cette définition aux arêtes OBy, Oγδ, Oδα. On aura:

|                          |                          |                                 |                                 |
|--------------------------|--------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| $O\alpha\beta \perp OA$  | $O\alpha\beta \perp OB$  | $CO\alpha\beta < 1 \text{ dr}$  | $DO\alpha\beta < 1 \text{ dr}$  |
| $O\beta\gamma \perp OB$  | $O\beta\gamma \perp OC$  | $DO\beta\gamma < 1 \text{ dr}$  | $AO\beta\gamma < 1 \text{ dr}$  |
| $O\gamma\delta \perp OC$ | $O\gamma\delta \perp OD$ | $AO\gamma\delta < 1 \text{ dr}$ | $BO\gamma\delta < 1 \text{ dr}$ |
| $O\delta\alpha \perp OD$ | $O\delta\alpha \perp OA$ | $BO\delta\alpha < 1 \text{ dr}$ | $CO\delta\alpha < 1 \text{ dr}$ |

Tout d'abord ces 4 nouvelles arêtes forment un véritable angle tétraèdre: Ces 4 demi-droites ne sont pas dans un même plan, si elles l'étaient OA, OB, OC, OD seraient respectivement issues de O et perpendiculaires à ce plan et ne formeraient pas un véritable angle tétraèdre. Ces 4 demi-droites ne sont pas confondues, si elles l'étaient OA, OB, OC, OD seraient perpendiculaires à cette demi-droite en O et par suite seraient dans un même plan de sorte que l'angle tétraèdre donné ne serait pas un véritable angle tétraèdre.

Montrons maintenant que l'angle tétraèdre  $O\alpha\beta, O\beta\gamma, O\gamma\delta, O\delta\alpha$  est convexe et se déduit de l'angle tétraèdre convexe OABCD comme  $O\alpha\beta, O\beta\gamma, O\gamma\delta, O\delta\alpha$  se déduit de OABCD.

En présentant les hypothèses dans un autre ordre on voit que:

$$OA \perp O\alpha\beta \quad OA \perp O\delta\alpha \quad AO\gamma\delta < 1 \text{ dr} \quad O\alpha\beta\gamma < 1 \text{ dr}$$

de sorte que  $OA$  est perpendiculaire au plan déterminé par  $O\alpha\beta$  et  $O\delta\alpha$  et comme  $O\gamma\delta$  fait avec  $OA$  un angle inférieur à  $1$  dr et  $O\beta\gamma$  aussi il en résulte que  $O\beta\gamma$  et  $O\gamma\delta$  sont situés d'un même côté de la face déterminée par  $O\alpha\beta$  et  $O\delta\alpha$  supposée prolongée.

Comme ceci est vrai pour les 4 arêtes  $O\alpha\beta$ ,  $O\beta\gamma$ ,  $O\gamma\delta$ ,  $O\delta\alpha$  l'angle tétraèdre ainsi formé est bien convexe et on voit en outre qu'il y a réciprocité entre les 2 angles tétraèdres convexes.

Considérons maintenant le trièdre  $OABC$ , par construction  $O\alpha\beta$  et  $O\beta\gamma$  sont des arêtes du trièdre supplémentaire de  $OABC$  de sorte que la face  $\alpha\beta\gamma$  est supplémentaire du dièdre  $OB$  de l'angle tétraèdre  $OABCD$ .

Chaque face de l'angle tétraèdre  $O\alpha\beta$ ,  $O\beta\gamma$ ,  $O\gamma\delta$ ,  $O\delta\alpha$  est donc supplémentaire d'un dièdre de l'angle tétraèdre  $OABCD$  et à cause de la réciprocité chaque dièdre de l'angle tétraèdre convexe supplémentaire de  $OABCD$  est supplémentaire d'une face de l'angle tétraèdre  $OABCD$ . Ces éléments seront dits homologues.

L'introduction de ces angles tétraèdres convexes supplémentaires se présente comme moins intéressante que l'introduction des trièdres supplémentaires parce qu'il s'agit d'éléments géométriques plus complexes ; elle nous sera quand même utile. Servons-nous maintenant les 15 régions de l'espace déterminées par les plans des 4 facettes d'un tétraèdre. (Planche XII).

Considérons l'angle tétraèdre  $I.KMLN$  obtenu en joignant  $I$ , milieu de  $AB$ , aux points  $K, M, L, N$  milieux de  $BC, AC, AD, BD$ . Le quadrilatère  $KMLN$  étant un parallélogramme il en résulte que  $IKMLN$  est un angle tétraèdre convexe.

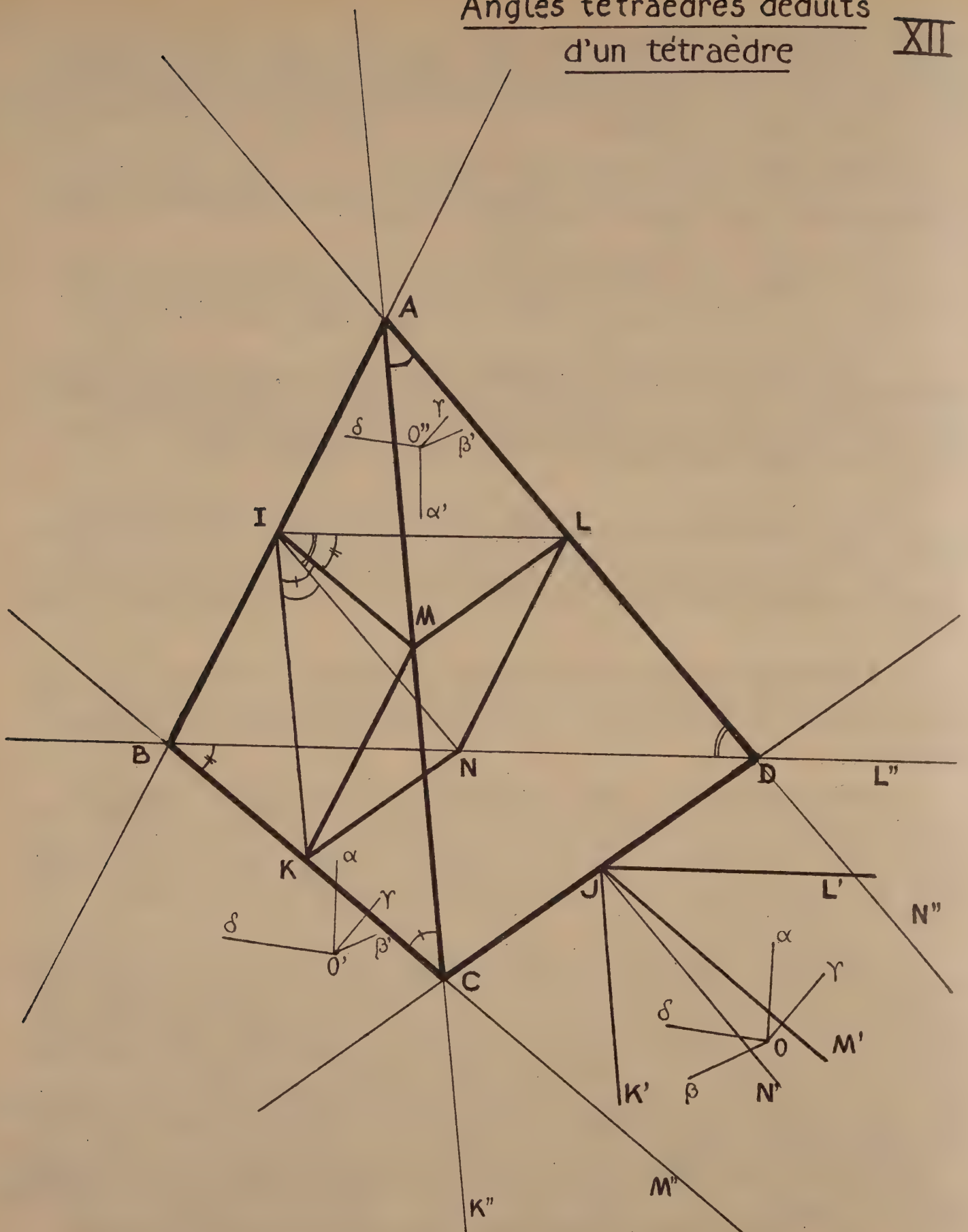
Soit  $J$  le milieu de  $CD$ . Imprimons à l'angle tétraèdre  $IKMLN$  la translation définie par le vecteur  $IJ$  il prend la position  $JK'M'L'N'$ . (On voit immédiatement que 2 faces de ce nouvel angle tétraèdre convexe sont placées sur 2 des portions de plans limitant le comble défini par l'arête  $CD$  et que les deux autres sont parallèles aux plans limitant 2 autres portions de ce même comble).

Considérons maintenant un point quelconque  $O$  situé à l'intérieur de l'angle tétraèdre  $JK'M'L'N'$ . Menons de  $O$  les demi-droites perpendiculaires aux plans des faces de cet angle tétraèdre convexe; les demi-droites  $O\alpha$ ,  $O\beta$ ,  $O\gamma$ ,  $O\delta$  ainsi tracées seront parallèles et de sens contraire à celle qu'on pourrait mener de  $I$  et qui définiraient l'angle tétraèdre supplémentaire de l'angle tétraèdre de sommet  $I$ ; le nouvel angle tétraèdre  $O\alpha\beta\gamma\delta$  sera donc symétrique de l'angle tétraèdre supplémentaire de  $I$ , il sera donc lui même convexe. Il en résulte que si nous prenons maintenant le point  $O$  quelconque à l'intérieur d'un des combles et que de ce point nous menons les perpendiculaires aux faces du comble nous déterminerons aussi un angle tétraèdre convexe. Il est facile de voir que les angles tétraèdres convexes définis pour les combles relatifs aux arêtes  $AB$  et  $CD$  sont symétriques.

Supposons maintenant que le point  $O$  traverse le plan  $K'CDN'$  et vienne en  $O'$  nous pénétrerons dans une région e, seule l'une des arêtes de l'an-

# Angles tétraèdres déduits d'un tétraèdre

XII



$\alpha$  parallèle à  $O'\alpha$  et à  $O''\alpha'$   
 $\beta$  parallèle à  $O'\beta'$  et à  $O''\beta''$   
 $\gamma$  parallèle à  $O'\gamma'$  et à  $O''\gamma''$   
 $\delta$  parallèle à  $O'\delta'$  et à  $O''\delta''$

$IM$  parallèle à  $JM'$   
 $IN$  parallèle à  $JN'$   
 $IK$  parallèle à  $JK'$   
 $IL$  parallèle à  $JL'$

gle tétraèdre convexe précédent  $O\beta$  sera remplacée par son prolongement  $O'\beta'$  l'angle tétraèdre convexe initial sera remplacé par un tétracanthé inversé comme nous l'avons démontré précédemment (comme  $O\alpha$  et  $O\beta$  étaient opposés pour l'angle tétraèdre  $O\alpha\gamma\beta\delta$ , on sait d'après une discussion précédente que  $O'\alpha$  sera intérieure au trièdre  $O'\gamma\beta\delta$ ). Il en sera de même si  $O$  traverse uniquement le plan  $CK''M''$  il pénétrera dans une région  $p$  et nous obtiendrons encore un tétracanthé inversé.

Enfin, si  $O'$  étant dans une région  $e$  traverse l'une des faces du tétraèdre, il pénètre alors à l'intérieur du tétraèdre. Pour fixer les idées, partons du tétracanthé inverse  $O'\alpha\beta'\gamma\delta$ . C'est l'arête  $O'\alpha$  qui sera prolongée, il en résulte que pour l'intérieur du tétraèdre nous obtiendrons un tétracanthé:  $O''\alpha'\beta'\gamma\delta$ .

Remarquons enfin que les tétracanthés inversés obtenus pour le trièdre tronqué de base  $BCD$  et pour la région  $p$  relative au sommet  $A$  sont visiblement symétriques.

Finalement les résultats sont les suivants:

Pour la région  $i$ : 1 tétracanthé

Pour les 4 régions  $e$  et pour les 4 régions  $p$  des tétracanthés inversés symétriques deux à deux, si on associe correctement une région  $p$  et une région  $e$ .

Pour les 6 régions  $c$  des angles tétraèdres convexes deux à deux symétriques.

Si nous faisons abstraction de la symétrie qui n'altère pas le genre d'un trièdre et qui n'altérera pas les genres des angles tétraèdres on pourra donc construire à partir d'un tétraèdre:

1 tétracanthé

4 tétracanthés inversés

3 angles tétraèdres convexes

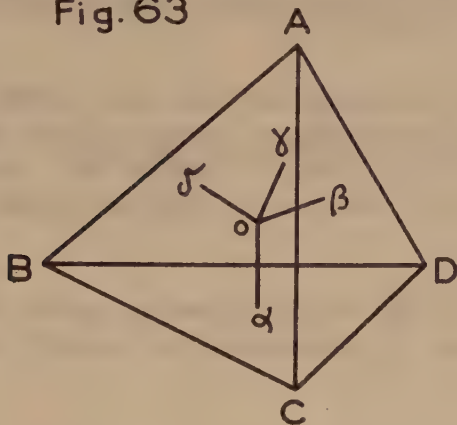
On peut passer directement du tétracanthé à l'angle tétraèdre convexe en prolongeant deux quelconques de ses arêtes et celles-ci seront deux arêtes opposées de l'angle tétraèdre convexe formé. Inversement si on prolonge deux arêtes opposés d'un angle tétraèdre convexe on détermine un tétracanthé.

# CLASSIFICATION DES TETRACANTHES, DES ANGLES TETRAEDRES CONVEXES, des TETRACANTHES INVERSES.

En définitive nous allons voir qu'un tétracanthé caractérise complètement un tétraèdre à une similitude près.

Prenons un point  $O$  à l'intérieur d'un tétraèdre et menons de  $O$  les demi droites  $O\alpha$ ,  $O\beta$ ,  $O\gamma$ ,  $O\delta$  perpendiculaires aux plans des faces du tétraèdre. Le tétracanthé  $O\alpha\beta\gamma\delta$  peut être considéré comme la juxtaposition de 4 trièdres, or l'un de ces trièdres  $O\beta\gamma\delta$  est justement le symétrique du trièdre supplémentaire du trièdre  $A$ , de sorte que, si le genre du tétraèdre est connu, le genre du tétracanthé correspondant est immédiatement connu, il suffit de chercher le complément à 6 du genre de chaque trièdre du tétraèdre donné. Inverse-

Fig. 63



ment supposons qu'on donne un tétracanthé  $O\alpha\beta\gamma\delta$  et construisons les plans perpendiculaires à chacune de ses arêtes menés par un point de ces arêtes nous formerons quatre plans qui se couperont deux à deux et qui détermineront un tétraèdre. Comme l'intérieur

d'un tétraèdre est la seule des régions déterminées par ces quatre plans qui permette de construire un tétracanthé il en résulte que  $O$  est certainement intérieur au tétraèdre aussi construit.

Ceci prouve qu'il y a autant de genres de tétracanthés qu'il y a de genres de tétraèdres. Le tétracanthé est donc une figure qui caractérise un tétraèdre en condensant sous la forme la plus réduite ses faces et ses dièdres.

C'est une généralisation de la propriété bien connue de géométrie plane que si l'on construit d'un point  $O$  intérieur à un triangle les perpendiculaires aux côtés du triangle on détermine une figure formée de trois angles juxtaposés, recouvrant tout le plan et qui caractérise le triangle à une similitude près; il est facile de démontrer que si l'on prolonge l'une des demi-droites au delà de  $O$  le prolongement est intérieur à l'angle adjacent. La comparaison avec la géométrie de l'espace est donc complète.



Fig. 64

La classification des tétracanthés étant terminée nous pouvons aborder maintenant celle des autres angles tétraèdres.

On obtient un tétracanthé inversé à partir d'un tétracanthé en prolongeant au delà du sommet l'une quelconque de ses quatre arêtes. En général chaque tétracanthé donnera donc naissance à quatre tétracanthés inversés; mais des considérations de symétrie réduiront beaucoup le nombre total de cas possibles:

$$27 \times 4 = 108$$

En effet si un tétraèdre présente un plan de symétrie deux de ses

tétracanthés inversés auront même genre. S'il peut avoir un axe ternaire trois des genres de ses tétracanthés inversés seront égaux; s'il peut avoir plus d'un axe ternaire ils seront tous égaux. Si un tétraèdre présente un axe binaire ses quatre tétracanthés inversés auront même genre deux à deux.

Les tétraèdres  $\alpha, \beta, \gamma, \eta', \eta'', \xi, \theta, \theta', \theta'', \zeta$  peuvent avoir un axe binaire. Parmi eux seuls  $\alpha$  et  $\gamma$  peuvent avoir deux axes binaires ce qui réduit de 22 le nombre des tétracanthés inversés pour ces tétraèdres.

En outre les tétraèdres  $\delta, \varepsilon, \theta, \pi, \nu, \psi, \omega$ , peuvent avoir un plan de symétrie. Parmi eux seul,  $\psi$  peut même avoir un axe ternaire, ce qui réduit de 8 le nombre des tétracanthés inversés pour ces tétraèdres.

Finalement le nombre des genres des tétracanthés inversés est égal à

$$108 - 22 - 8 = 78$$

Considérons le même problème pour les angles tétraèdres convexes.

Il est facile de voir que dans ce cas la possibilité d'un axe binaire ne peut réduire leur nombre. Seul le fait qu'un tétraèdre peut présenter un plan de symétrie réduira d'une unité le nombre des genres de ses angles tétraèdres convexes. S'il peut avoir un axe ternaire, il ne donnera naissance qu'à un genre d'angle tétraèdre convexe. Si aucune considération de symétrie ne jouait le nombre des genres d'angles tétraèdres convexes serait de  $27 \times 3 = 81$  puisque chaque tétraèdre ou chaque tétracante donne naissance à trois angles tétraèdres convexes.

Les tétraèdres  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \xi, \eta', \theta, \pi, \nu, \psi, \omega$  peuvent avoir un plan de symétrie. Parmi eux seuls  $\alpha$  et  $\psi$  peuvent avoir un axe ternaire de sorte que le nombre total est réduit de 14 unités.

Le nombre des genres d'angles tétraèdres convexes est

$$81 - 14 = 67$$

En résumé nous pouvons donc prévoir

27 genres de tétracanthés

78 genres de tétracanthés inversés

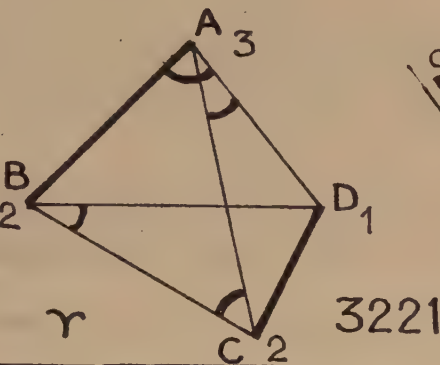
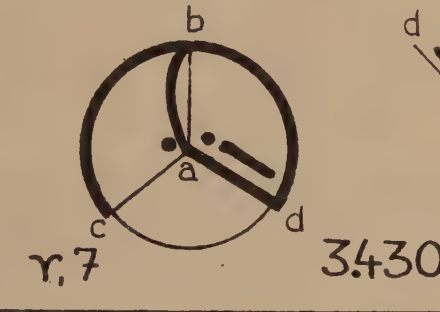
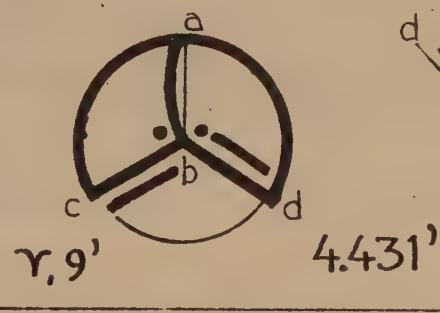
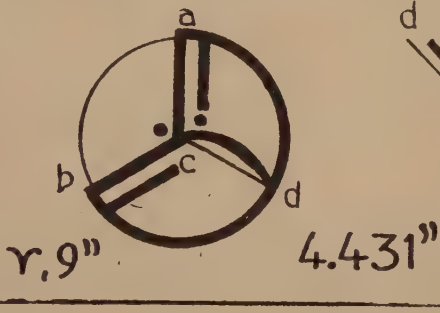
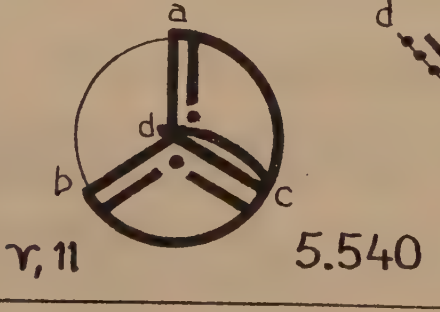
67 genres d'angles tétraèdres convexes au total

172 genres pour les angles tétraèdres convexes ou non

Il nous faut maintenant expliquer comment nous représenterons symboliquement les tétracanthés inversés et les angles tétraèdres convexes.

Un tétracante inversé peut être considéré comme un trièdre décomposé par une quatrième arête intérieure en trois trièdres juxtaposés. Nous

# XIII Tétracanthés inversés provenant du genre $\gamma$

|                                                                                                                             |                               |                                        |                  |          |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------|----------------------------------------|------------------|----------|
|  <p><math>\gamma</math> 3221</p>           | bcd<br>3                      | acd<br>4                               | abd<br>4         | abc<br>5 |
|  <p><math>\gamma, 7</math> 3430</p>       | dièdre d<br>obtus<br>$\gamma$ | dièdre a<br>aigu<br>Tétracante<br>5443 | dièdre d<br>aigu |          |
|  <p><math>\gamma, 9'</math> 4.431'</p>   | <u>3</u>                      | 0                                      | 4                | 3        |
|  <p><math>\gamma, 9''</math> 4.431''</p> | 1                             | <u>4</u>                               | 4                | 3        |
|  <p><math>\gamma, 11</math> 5.540</p>    | 3                             | 4                                      | <u>4</u>         | 1        |
|  <p><math>\gamma, 11</math> 5.540</p>    | 5                             | 4                                      | 0                | <u>5</u> |

utiliserons pour le trièdre extérieur la représentation symbolique déjà utilisée et chaque secteur circulaire deviendra la représentation de chaque trièdre interne à la condition qu'on marque ses éléments obtus.



Fig.65

Soit  $O\alpha$  l'arête interne, elle détermine trois dièdres ayant  $O\alpha$  pour arête, chacun de ceux qui sera obtus sera marqué par un petit cercle tracé en noir intérieur au secteur circulaire convenable il est facile de voir que deux au moins de ces trois dièdres seront obtus. Chaque dièdre du trièdre  $O\beta\gamma\delta$  est décomposé en deux dièdres par l'introduction de l'arête interne. Si l'un de ses dièdres est obtus il peut être décomposé en un dièdre obtus et un dièdre aigu ou en deux dièdres aigus. Nous le marquerons sur le dessin par un trait épais parallèle à l'arête du dièdre obtus

du trièdre  $O\beta\gamma\delta$ . Enfin les faces obtuses internes seront marquées par un arc de courbe joignant les arêtes qui limitent ces faces obtuses (voir plus haut (planche XIII)).

Dans le même esprit nous représenterons symboliquement un angle tétraèdre convexe en remarquant qu'il est la juxtaposition de deux trièdres et ceci de deux manières différentes. Les dièdres obtus internes seront encore marqués par des traits parallèles aux rayons et ceci sera possible seulement dans le cas où ces rayons symboliseront des dièdres obtus. Les faces internes obtuses seront elles aussi, marquées par des arcs de courbes comme dans le cas précédent (voir planche XIV).

Nous nous proposons de montrer, sur un exemple, comment d'un tétraèdre de genre déterminé on déduit les quatre genres des tétracanthés inversés et les trois genres d'angles tétraèdres convexes qui proviennent de lui.

Le genre choisi est le genre  $\nu$  (3221) (voir planche XIII)

On commence par dessiner le tétracanthé correspondant. Aux dièdres obtus d'un tétraèdre correspondent les faces aiguës du tétracanthé, ce sont elles que nous marquerons d'un trait croisé; ici leur nombre est deux et on sait qu'il ne peut jamais être supérieur à trois. Toute face non marquée sur le tétracanthé sera donc sûrement obtuse.

Sur le tétraèdre ABCD on marque les genres des trièdres; on obtient immédiatement la formule du tétracanthé  $Oabcd: 5443$  et on inscrit les genres de ces trièdres, écrits pour abrégé bcd, acd, abd, abc.

Comme les faces aiguës du tétracanthé sont marquées on sait que aod est la seule face aiguë du trièdre de genre 5; on sait aussi pour les trièdres de genre 4, qu'à la face aiguë est opposé le dièdre aigu, nous l'avons marqué; le seul repérage un peu délicat est celui du trièdre de genre 3, aucune difficulté pour les faces; le seul dièdre obtus est l'homologue de la seule face aiguë du trièdre A, c'est-à-dire BAC; le dièdre obtus est donc od, nous le marquons sur le tétracanthé avec la mention 3.

Tétracanthes inversés déduits du tétraèdre V, 3221. Il faudra chaque fois remplacer une arête du tétracanthé et une seule par son prolongement, cette arête sera dessinée en pointillé. Un trièdre sera chaque fois intégralement conservé; nous inscrirons son genre et nous le soulignerons. Pour opérer rapidement nous examinerons ce que devient un trièdre déterminé du tétracanthé quand on prolonge tour à tour l'une des quatre arêtes de ce tétracanthé.

Il nous suffira d'appliquer les résultats symbolisés sur la planche II.

Trièdre obcd de genre 3: Pour Oa prolongé il est inaltéré. Pour Ob prolongé, arête d'un dièdre aigu opposé à la face aiguë il devient de genre 1.

Pour Oc prolongé, arête d'un dièdre aigu opposé à une face obtuse le trièdre devient de genre 3.

Pour Od prolongé, arête du seul dièdre obtus le trièdre devient de genre 5.

Trièdre Oacd de genre 4: Le trièdre est conservé si l'on prolonge Ob. Si l'arête prolongée est Oa, seul dièdre aigu, le trièdre devient de genre 0; il reste de genre 4 pour les arêtes Oc et Od prolongées.

Trièdre Oabcd de genre 4: Les résultats sont analogues.

Trièdre Oabcd de genre 5: Le trièdre est conservé si l'on prolonge Od. Si l'arête prolongée est Oc, opposée à la face aiguë le trièdre devient de genre 1, il est de genre 3 si l'on prolonge les deux autres arêtes.

Les formules des 4 tétracanthes inversés seront donc connues; on nommera d'abord le trièdre qui englobe les trois autres trièdres en faisant suivre son genre d'un point; les autres genres suivront, écrits par ordre de grandeurs décroissantes.

3.430; 4.431' ; 4.431" ; 5.540

Les mentions ' et " proviennent de ce qu'on rencontre plusieurs fois la même formule globale pour l'ensemble des tétracanthes inversés, on n'a pu mettre ces mentions que lorsque le classement général a été connu.

Représentations symboliques des formes trouvées. Nous en avons déjà expliqué le principe; on marquera soigneusement les arêtes du trièdre conservé, la 4ème arête qui est intérieure au trièdre est réduite à un point et confondue avec le centre du cercle; les éléments obtus seront notés en trait plein.

3.430. Le trièdre oabd est de genre 4, sa seule face aiguë est ad (qui provient d'une face obtuse du tétracanthé) on doit marquer ab et bd obtu-

ses, pour bd c'est déjà fait; les dièdres opposés aux deux faces obtuses sont obtus on les marque, le dièdre dont l'arête est perpendiculaire au plan du dessin par un petit cercle dessiné en noir, l'autre, par un trait parallèle au rayon du cercle et à l'intérieur du secteur bad.

Le trièdre Oabc est de genre 3, il a une seule face aiguë ac, qui provient d'une face obtuse du tétracanthé; les deux autres faces sont obtuses et déjà marquées. Ce trièdre de genre 3 provenant d'un trièdre de genre 5, son dièdre obtus est Oa, car c'est le seul dièdre qui est resté obtus lorsqu'on prolonge Oa, on le marque avec un gros point noir.

4.431'. Le trièdre Oabd est de genre 4, sa seule face aiguë est bd (qui provient d'une face obtuse). On marque les 2 autres faces qui sont obtuses, l'une d'elles est déjà marquée, les dièdres obtus s'en déduisent immédiatement.

Le trièdre Oabc est de genre 3, la seule face aiguë est bc le dièdre obtus est Ob, puisque c'est l'arête Ob qui est prolongée.

Le trièdre Obcd est de genre 1, il provient d'un trièdre de genre 3; son seul dièdre obtus est Oc (lequel était initialement aigu pour le tétracanthé).

4.431". Le trièdre Oacd est de genre 4, sa seule face aiguë est ac (qui provient d'une face obtuse), les 2 dièdres obtus sont marqués immédiatement.

Le trièdre Obcd est de genre 3, sa seule face aiguë est bc (qui provient d'une face obtuse); son seul dièdre obtus est Ob (qui provient d'un dièdre aigu).

Le trièdre Oabc est de genre 1, son seul dièdre obtus est Oc, il a été inaltéré.

5.540. Le trièdre Obcd est de genre 5, il n'a qu'une face aiguë bd qui provient d'une face obtuse); les trois dièdres obtus se marquent immédiatement.

Le trièdre Oacd est de genre 4; il n'a qu'une face aiguë ad (qui provient d'une face obtuse). Les deux dièdres obtus sont opposés aux faces obtuses.

Les trièdres Oabd est de genre 0.

Nous allons mettre en évidence une importante vérification. A côté de chaque genre de tétracanthé inversé nous avons marqué non seulement la formule marquée précédemment mais une nouvelle formule, plus simple,

composée de la lettre grecque caractérisant le tétraèdre et suivie d'un nombre qui est égal au nombre total des éléments obtus du tétracanthé inversé considéré. Cet ensemble de deux symboles suffit en général à caractériser un tétracanthé inversé, on leur adjoindra la mention ' ou " s'il pouvait y avoir doute (c'est du reste le cas ici, aussi avons-nous les genres  $\gamma$ , 9' et  $\gamma$ , 9").

Reportons-nous maintenant aux résultats trouvés relativement au nombre total d'éléments obtus d'un parallélépipède. Nous savons que la somme des genres de tous les trièdres d'un parallélépipède est égale à 24, mais un parallélépipède ayant un centre de symétrie la somme des genres d'un trièdre et de ceux qu'on obtient à partir de lui en prolongeant successivement chacune de ses trois arêtes est égale à 12, (se reporter, à la figure 21).

Or c'est justement l'opération que nous venons de faire à partir de chacun des trièdres du tétracanthé, on doit donc s'attendre à ce que la somme des 4 nombres inscrits dans chacune des colonnes verticales de la planche XIII soit égale à 12, ce que l'on vérifie aisément. Le total des nombres inscrits dans les 4 colonnes est donc de 48.

Considérons maintenant la somme des nombres 7, 9, 9, 11 qui indiquent le nombre total d'éléments obtus de chaque tétracanthé inversé, nous allons montrer que cette somme est elle-même constante.

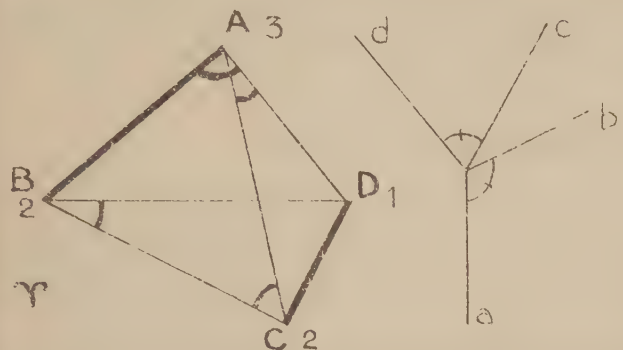
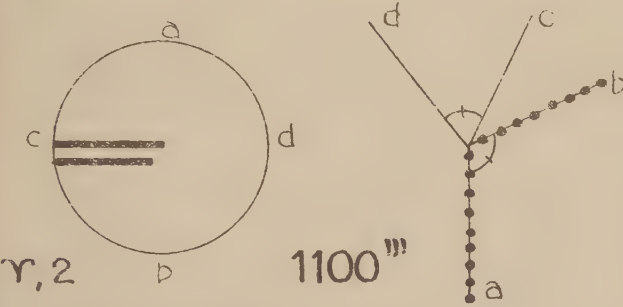
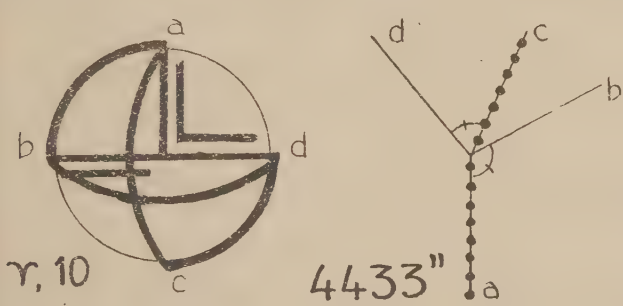
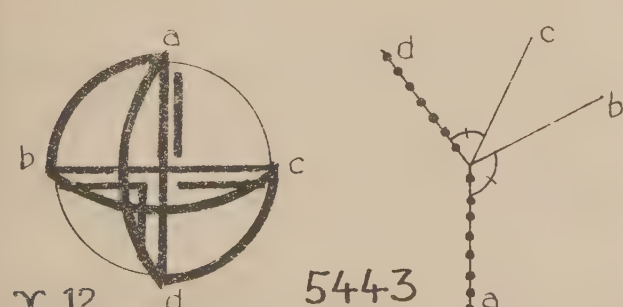
Considérons le genre 3.430 que nous avons noté  $\gamma$ , 7. La somme des genres des 4 trièdres qui composent la figure est égale à 10, elle est supérieure de 3 unités à 7 parce que certains éléments sont comptés deux fois ce sont les faces obtuses qui sont communes à 2 trièdres. Ici elles sont en effet au nombre de trois.

Considérons maintenant pour fixer les idées, la face cod du tétracanthé; elle est aiguë. Elle restera aiguë si l'on prolonge les arêtes Oa et Ob; elle deviendra obtuse quand on prolongera les arêtes Oc et Od. Pour les 4 tétracanthés cette face sera donc comptée autant de fois comme élément obtus que comme élément aigu; elle participera donc au total de 48 pour 2 éléments obtus de trop puisqu'elle est chaque fois comptée pour deux trièdres. Six faces jouent le même rôle que la face cod c'est-à-dire qu'il faudra retrancher de 48, douze éléments obtus pour avoir la somme des nombres 7, 9, 9, 11. Ce total sera donc constant pour tous les tétracanthés inversés, ce qui constitue une importante vérification et nous recevons en même temps une sorte de justification du choix que nous avons fait de caractériser chaque tétracanthé inversé par une formule simplifiée.

#### XIV) Angles tétraèdres convexes déduits du tétraèdre $\gamma$ , 3221 (Planche

On sait qu'il y a 6 angles tétraèdres convexes deux à deux symétriques; trois seront seulement à examiner; on pourra se limiter à ceux qui sont relatifs aux combles pour les arêtes BC, CD, DB. L'arête Oa sera donc toujours prolongée pour le tétracanthé, on lui adjoindra les arêtes ob, oc, od prolongées tour à tour.

# XIV Angles tétraèdres convexes provenant du genre $\gamma$

|                                                                                    |              | bcd      | acd        | abd   | abc |
|------------------------------------------------------------------------------------|--------------|----------|------------|-------|-----|
|    |              | 3        | 4          | 4     | 5   |
|                                                                                    | $\gamma$     | $\gamma$ | tétracante | 54 43 |     |
|    |              | 1        | 0          | 0     | 1   |
|                                                                                    | $\gamma, 2$  |          |            |       |     |
|  |              | 3        | 4          | 4     | 3   |
|                                                                                    | $\gamma, 10$ |          |            |       |     |
|  |              | 5        | 4          | 4     | 3   |
|                                                                                    | $\gamma, 12$ |          |            |       |     |

Trièdre Obcd: on prolonge successivement Ob, Oc, Od. Les résultats ont été inscrits pour la précédente figure.

Trièdre Oacd: on trouve d'abord Oa prolongé; puis, à la fois Oa et Oc mais on sait que ceci revient à prolonger Od, résultat connu. Enfin on doit prolonger à la fois Oa et Od, ce qui revient à prolonger Oc, résultat encore connu.

Ces résultats s'étendent aux trièdres Oabd et Oabc.

Représentation symbolique: il convient d'abord de disposer correctement les extrémités des arêtes sur le cercle. On sait que si on prolonge par exemple Oa et Ob ces deux arêtes seront arêtes opposées de l'angle tétraèdre convexe; elles devront être placées diamétralement sur le cercle.

1100". Trièdre bcd de genre 1, le seul dièdre obtus est Oc (qui provient d'un dièdre aigu) on le marque.

Trièdre abc de genre 1; tout se passe comme si Oc avait été prolongée, c'est le seul dièdre qui reste obtus.

4433". Trièdre bcd de genre 3; le seul dièdre obtus est Ob; la face bc est la seule face aiguë, elle provient d'une face obtuse.

Trièdre acd de genre 4; le seul dièdre aigu est Oc; aux dièdres obtus sont opposées des faces obtuses.

Trièdre abd de genre 4, le seul dièdre aigu est Ob; aux dièdres obtus sont opposées des faces obtuses.

Trièdre abc de genre 3, un seul dièdre obtus Ob, les faces obtuses sont déjà marquées.

5443. Trièdre bcd de genre 5, une seule face aiguë bd, tous les autres éléments sont obtus.

Trièdre acd de genre 4, une seule face aiguë ac, opposée à un dièdre aigu, tous les autres éléments sont obtus.

Trièdre abd de genre 4, une seule face aiguë bd, opposée à un dièdre aigu; tous les autres éléments sont obtus.

Trièdre abc de genre 3, un seul dièdre obtus Oa, qui l'était primitivement; les faces obtuses sont déjà marquées.

On peut encore mettre en évidence une vérification analogue à celle relative aux tétracanthés inversés, bien qu'elle se présente moins simplement.

Considérons le trièdre  $obcd$ , pris successivement dans le tétracanthé et dans les angles tétraèdres convexes, on le trouve une fois pour lui-même, puis chaque fois ensuite avec une arête prolongée; la somme des genres correspondants est donc 12.

Prenons maintenant le trièdre  $Oabc$ , pris pour lui-même dans le tétracanthé il est pris ensuite avec  $Oc$  prolongé, puis avec  $Ob$  et enfin avec  $Oa$ ; la somme des genres correspondants est encore 12. On retrouve donc une somme totale de 48 pour les nombres inscrits dans les 4 colonnes, tétracanthé compris.

Considérons une face quelconque du tétracanthé  $boc$ , c'est une face obtuse. Elle est obtuse pour ce tétracanthé et successivement aiguë, aiguë, obtuse pour les angles tétraèdres convexes: Ce résultat est évidemment général. Dans le total cette face est comptée 2 fois comme obtuse; mais comme elle est comptée chaque fois pour deux trièdres elle compte au total pour 2 éléments obtus de trop, c'est-à-dire qu'il y a en définitive  $2 \times 6 = 12$  éléments obtus de trop, puisque six faces sont dans ce cas.

La somme des éléments obtus des trois angles tétraèdres convexes et du tétracanthé est égale à 36. Le nombre total des éléments d'un tétraèdre est 18 (12 faces et 6 dièdres). Désignons par  $t$  le nombre des éléments obtus d'un tétraèdre et par  $t'$  le nombre des éléments obtus du tétracanthé correspondant; on a donc  $t + t' = 18$ .

Soit  $n$  la somme de tous les éléments obtus des 3 angles tétraèdres convexes provenant du même tétracanthé. Nous venons de prouver que  $n + t = 36$ .

Donc  $n + 18 - t = 36$ , finalement  $n - t = 18$ .

Nous avons marqué, pour l'exemple choisi, le nombre des éléments obtus de chaque angle tétraèdre convexe: 2, 10, 12.

Le tétraèdre correspondant à 6 éléments obtus, on vérifie donc que:

$$2 + 10 + 12 - 6 = 18$$

Nous sommes donc en présence d'une nouvelle et importante vérification, qui en même temps, nous justifie de caractériser chaque angle tétraèdre convexe par deux symboles simples: une lettre grecque suivie du nombre total de ses éléments obtus.

Nous avons tenu à donner la justification complète relative aux angles tétraèdres déduits d'un tétraèdre déterminé pour qu'on puisse apprécier la solidité de nos résultats et en particulier l'intérêt des représentations symboliques.

Ce travail nous l'avons systématiquement entrepris pour tous les genres de tétraèdres; nous nous contenterons, pour alléger, de résumer les résultats obtenus dans les tableaux suivants, nous avons chaque fois indiqué pour chaque figure les deux dénominations; c'est la plus simple, celle qui utilise les lettres grecques, que nous avons marqué sur les planches XV et XVI, lesquelles réuniront toutes les formes de tétracanthes inversés et d'angles tétraèdres convexes, représentées symboliquement.

Les liaisons entre les différentes formes d'angles tétraèdres se dessinent simplement parce que nous avons pu chaque fois passer d'un genre déterminé de tétraèdre à un genre voisin sur la résille en conservant la même notation de tous les éléments obtus qui sont communs aux deux genres. Ceci ne s'est révélé impossible que pour le genre  $\Sigma$  qui se signale une fois de plus par son originalité. Sur les planches XV et XVI sa parenté avec le genre  $\sigma$  se présente très simplement, mais sa parenté avec  $O''$  est mise en évidence par une sorte d'échange entre les familles des tétracanthes inversés et des angles tétraèdres convexes. On peut du reste expliquer cette anomalie par des considérations géométriques simples.

On peut aussi suivre sur ces deux grandes figures l'évolution des formes des angles tétraèdres, on retrouve très exactement la réduction du nombre des genres dus aux possibilités de symétrie pour le tétraèdre qui occupe la même place sur la résille; c'est une intéressante vérification.<sup>(1)</sup>

Si l'on examine la planche XVI on remarque que l'angle tétraèdre convexe qui a le plus petit nombre d'éléments obtus en possède un, sous forme d'un dièdre obtus. On pouvait prévoir qu'aucun angle tétraèdre convexe ne pourrait avoir tous ses dièdres extérieurs aigus; il peut, en effet, être considéré comme formé par la juxtaposition de deux trièdres ce qui prouve que la somme de ses dièdres extérieurs est sûrement supérieure à 4 droits, ce qui interdit à chacun d'entre eux d'être aigu.

Il est intéressant d'ajouter que si l'on suppose, pour un instant, que le genre 2222 puisse exister on montrerait facilement que l'un des angles tétraèdres convexes correspondant aurait justement tous ses dièdres aigus, ce qui, nous venons de le voir, aboutit à une contradiction.

Cet angle tétraèdre convexe serait au reste supplémentaire de l'angle tétraèdre convexe IJKML (fig.45). Il est donc équivalent de montrer que l'impossibilité de construction d'un tétraèdre de genre 2222 procède de l'impossibilité de construire l'un ou l'autre de ces angles tétraèdres convexes. La démonstration que nous avons donnée, au chapitre II, demeure la plus simple, mais celle que nous venons de donner est une intéressante vérification de caractère corrélatif.

(1) Sur les planches XV et XVI les angles tétraèdres égaux ou symétriques, provenant d'un même tétraèdre, ont été hachurés ou pointillés.

FIGURES DEDUITES DES TETRAEDRES

| Tétraèdres         | Tétracanthes       | Tétracanthes inversés |                                                                                           | Angles tétraèdres convexes                                            |
|--------------------|--------------------|-----------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|
| $\alpha$<br>0000   | $\alpha$<br>6666   | 6.222                 | $\alpha, 9$                                                                               | 2222 $\alpha, 6$<br>2222 $\alpha, 6$<br>2222 $\alpha, 6$              |
| $\beta$<br>1100    | $\beta$<br>6655    | 6.332'                | $\beta, 10$<br>6.332' $\beta, 10$<br>5.221' $\beta, 8$<br>5.221' $\beta, 8$               | 3322''' $\beta, 7$<br>3322''' $\beta, 7$<br>2211' $\beta, 5$          |
| $\gamma$<br>1111   | $\gamma$<br>5555   | 5.331'                | $\gamma, 9$<br>5.331' $\gamma, 9$<br>5.331' $\gamma, 9$<br>5.331' $\gamma, 9$             | 3333''' $\gamma, 8$<br>3333''' $\gamma, 8$<br>1111' $\gamma, 4$       |
| $\delta$<br>2100   | $\delta$<br>5654   | 6.432'                | $\delta, 11$<br>6.432' $\delta, 11$<br>5.220 $\delta, 7''$<br>4.221' $\delta, 7'$         | 4322'' $\delta, 8$<br>4322'' $\delta, 8$<br>2210' $\delta, 4$         |
| $\epsilon$<br>2111 | $\epsilon$<br>5554 | 5.431'                | $\epsilon, 10$<br>5.431' $\epsilon, 10$<br>5.330 $\epsilon, 8''$<br>4.331' $\epsilon, 8'$ | 4333''' $\epsilon, 9$<br>4333''' $\epsilon, 9$<br>1110' $\epsilon, 3$ |
| $\zeta$<br>2200    | $\zeta$<br>5544    | 6.442                 | $\zeta, 12$<br>6.442 $\zeta, 12$<br>4.220 $\zeta, 6$<br>4.220 $\zeta, 6$                  | 4422 $\zeta, 9$<br>4422 $\zeta, 9$<br>2200 $\zeta, 3$                 |
| $\eta'$<br>2211'   | $\eta'$<br>5544'   | 5.441                 | $\eta', 11$<br>5.441 $\eta', 11$<br>4.330 $\eta', 7$<br>4.330 $\eta', 7$                  | 4433''' $\eta', 10$<br>4433''' $\eta', 10$<br>1100' $\eta', 2$        |
| $\eta''$<br>2211'' | $\eta''$<br>5544'' | 5.430                 | $\eta'', 9''$<br>5.430 $\eta'', 9''$<br>4.431' $\eta'', 9'$<br>4.431' $\eta'', 9'$        | 4433' $\eta'', 10'$<br>4433''' $\eta'', 10''$<br>1100'' $\eta'', 2$   |
| $\theta$<br>2221   | $\theta$<br>5444   | 5.440                 | $\theta, 10''$<br>4.441 $\theta, 10'$<br>4.430 $\theta, 8$<br>4.430 $\theta, 8$           | 4443 $\theta, 11$<br>4443 $\theta, 11$<br>1000 $\theta, 1$            |
| $\iota$<br>3100    | $\iota$<br>6653    | 6.532'                | $\iota, 12$<br>6.332' $\iota, 10$<br>5.221'' $\iota, 8$<br>3.221' $\iota, 6$              | 5322 $\iota, 9$<br>3322'' $\iota, 7$<br>2211''' $\iota, 5$            |

| Tétraèdres  | Tétracanthes | Tétracanthes inversés                                                  | Angles tétraèdres convexes                   |
|-------------|--------------|------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------|
| X<br>3111   | X<br>5553    | 5.531' X, 11<br>5.331" X, 9'<br>5.331''' X, 9"<br>3.331' X, 7          | 5333 X, 10<br>3333''' X, 8<br>1111''' X, 4   |
| λ<br>3200   | λ<br>6643    | 6.542 λ, 13<br>6.432" λ, 11<br>4.221" λ, 7<br>3.220 λ, 5               | 5422 λ, 10<br>4322' λ, 8<br>2210" λ, 4       |
| μ'<br>3211' | μ'<br>5543'  | 5.541 μ', 12<br>5.431" μ', 10<br>4.331" μ', 8<br>3.330 μ', 6           | 5433' μ', 11<br>4333" μ', 9<br>1110" μ', 3   |
| μ"<br>3211" | μ"<br>5543 " | 5.530 μ", 10"<br>5.431" μ", 10'<br>4.331" μ", 8"<br>3.431 μ", 8'       | 5433" μ", 11<br>4333' μ", 9<br>1110" μ", 3   |
| ν<br>3221   | ν<br>5443    | 5.540 ν, 11<br>4.431" ν, 9'<br>4.431''' ν, 9"<br>3.430 ν, 7            | 5443 ν, 12<br>4433" ν, 10<br>1100" ν, 2      |
| ξ<br>3300   | ξ<br>6633    | 6.532" ξ, 12<br>6.532" ξ, 12<br>3.221" ξ, 6<br>3.221" ξ, 6             | 5522 ξ, 11<br>3322" ξ, 7<br>2211" ξ, 5       |
| o'<br>3311' | o'<br>5533'  | 5.531" o', 11<br>5.531" o', 11<br>3.331" o', 7<br>3.331" o', 7         | 5533' o', 12<br>3333" o', 8<br>1111" o', 4   |
| o"<br>3311" | o"<br>5533"  | 5.531''' o", 11<br>5.531''' o", 11<br>3.331''' o", 7<br>3.331''' o", 7 | 5533" o", 12<br>3333' o", 8<br>1111''' o", 4 |
| π<br>4110   | π<br>6552    | 6.633' π, 13<br>5.322 π, 9<br>5.322 π, 9<br>2.211' π, 5                | 6332 π, 10<br>3221''' π, 6<br>3221''' π, 6   |
| ρ<br>4210   | ρ<br>6542    | 6.643 ρ, 14<br>5.422 ρ, 10<br>4.322 ρ, 8<br>2.210 ρ, 4                 | 6422 ρ, 11<br>4221 ρ, 7<br>3220 ρ, 5         |



# FILIATIONS DES TÉTACANTHES INVERSÉS XV





# FILIATIONS DES ANGLES TÉTRAÈDRES CONVEXES



| Tétraèdres       | Tétracanthes     | Tétracanthes inversés                                                                    | Angles tétraèdres convexes                                       |
|------------------|------------------|------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|
| $\sigma$<br>4310 | $\sigma$<br>6532 | 6.633" $\sigma$ , 13<br>5.522 $\sigma$ , 11<br>3.322 $\sigma$ , 7<br>2.211" $\sigma$ , 5 | 6532 $\sigma$ , 12<br>3221' $\sigma$ , 6'<br>3221" $\sigma$ , 6" |
| $\tau$<br>4411   | $\tau$<br>5522   | 5.632 $\tau$ , 12<br>5.632 $\tau$ , 12<br>2.321 $\tau$ , 6<br>2.321 $\tau$ , 6           | 6633 $\tau$ , 13<br>3222' $\tau$ , 7<br>2211" $\tau$ , 5         |
| $\sim$<br>5111   | $\sim$<br>5551   | 5.533' $\sim$ 12<br>5.333 $\sim$ 10<br>5.333 $\sim$ 10<br>1.111' $\sim$ 4                | 51331 $\sim$ , 9<br>3331" $\sim$ , 7<br>3331" $\sim$ , 7         |
| $\phi$<br>5211   | $\phi$<br>5541   | 5.543 $\phi$ , 13<br>5.433" $\phi$ , 11<br>4.333 $\phi$ , 9<br>1.110 $\phi$ , 3          | 5431 $\phi$ , 10<br>4331' $\phi$ , 8<br>3330 $\phi$ , 6          |
| $\chi$<br>5311   | $\chi$<br>5531   | 5.533" $\chi$ , 12'<br>5.533" $\chi$ , 12"<br>3.333 $\chi$ , 8<br>1.111" $\chi$ , 4      | 5531 $\chi$ , 11<br>3331' $\chi$ , 7'<br>3331" $\chi$ , 7"       |
| $\psi$<br>6111   | $\psi$<br>5550   | 5.433' $\psi$ , 11<br>5.433' $\psi$ , 11<br>5.433' $\psi$ , 11<br>0.111 $\psi$ , 3       | 4331" $\psi$ , 8<br>4331" $\psi$ , 8<br>4331" $\psi$ , 8         |
| $\omega$<br>6211 | $\omega$<br>5540 | 5.443 $\omega$ , 12<br>5.443 $\omega$ , 12<br>4.433 $\omega$ , 10<br>0.110 $\omega$ , 2  | 4431 $\omega$ , 9<br>4431 $\omega$ , 9<br>4330 $\omega$ , 7      |

### Résilles des angles tétraèdres

La planche XVII représente aussi simplement que possible, les filiations des tétracanthes inversés et des angles tétraèdres convexes. La difficulté de présentation de la figure provient des tétracanthes inversés et des angles tétraèdres convexes de même genre, appartenant à un même tétraèdre. En articulant assez simplement la résille des tétraèdres et en tenant compte des éléments communs nous avons réussi, nous l'espérons, à faire deux figures aussi condensées que possible; figures inconcevables évidemment si l'élément fondamental qu'est la résille des tétraèdres n'avait pas été construite au préalable. La comparaison entre la filiation linéaire des genres de trièdres, si simple qu'on hésite même à la dessiner, et l'architecture complexe qui représente l'ensemble des 67 angles tétraèdres convexes met en évidence la liberté de formes qu'impose l'introduction de cette quatrième arête. Elle montre de quelle complexité



pourrait être l'étude des formes de pyramides ayant pour bases un quadrilatère convexe, par exemple. Nous avons du reste entrepris d'étudier dans le même esprit l'octaèdre qu'on peut déduire d'un tétraèdre en prenant pour ses sommets les milieux des six arêtes du tétraèdre. Il présente un centre de symétrie, de sorte que son étude se réduit à celle de trois angles tétraèdres convexes liés entre eux. Cette étude est difficile elle n'est pas terminée; le fait que les trois angles tétraèdres convexes sont liés entre eux limite les possibilités du plus complexe des trois, de manière très intéressante comme s'il s'agissait d'un trio musical avec un premier instrument plus riche que les deux autres.

Nous avons enfin réalisé une très grande figure sur laquelle nous avons placé les 67 formes d'angles tétraèdres convexes en dessinant un tableau à double entrée: thèmes des dièdres au nombre de 27 et thèmes des faces au nombre de 11. La comparaison avec la même figure relative aux thèmes des dièdres et des faces pour les trièdres est encore très instructive. Nous avons aussi fait la même figure pour les tétracanthés inversés. Nous nous excusons de ne pas avoir reproduit ici ces deux fig. qui sont de grandes dimensions et difficilement réductibles. Qu'il nous suffise de dire que pour les angles tétraèdres convexes il y a 27 thèmes de dièdres (provenant des 12 thèmes de faces des tétraèdres) et 11 thèmes de face (provenant des 6 thèmes de dièdres des tétraèdres). Cette simple remarque permet de comprendre pourquoi certains thèmes sont riches de possibilités et pourquoi d'autres ne donnent qu'une forme. Et pour le tétraèdre lui-même la richesse ou la pauvreté d'un thème est liée aux possibilités et pourquoi d'autres ne donnent qu'une forme. Et pour le tétraèdre lui-même la richesse ou la pauvreté d'un thème est liée aux possibilités architecturales des trièdres et aussi à la limitation très stricte du nombre des dièdres et des faces obtuses. L'aspect simple et cohérent des filiations des trièdres entre eux conduit néanmoins dès qu'il s'agit des tétraèdres et encore plus pour les angles tétraèdres convexes à un apparent désordre. Nous avons essayé de retrouver un ordre cohérent, qui semblait caché: la résille le met en évidence malgré ses intéressantes singularités. La résille elle-même n'est plus qu'un élément fondamental trois fois répété pour les angles tétraèdres convexes, quatre fois répété pour les tétracanthés inversés avec des parties communes que révèlent des considérations élémentaires de symétrie. Ce sont justement ces parties communes qui compliquent singulièrement la construction de ces deux figures.

Très modeste, à l'origine, notre but était simplement de faire une classification cohérente des formes des trièdres. Il était tentant d'étendre cette classification à celle des tétraèdres; nous avons longtemps considéré cette dernière comme étant une fin en soi. La résille nous a paru être, à un certain moment, comme l'aboutissement de tous nos efforts. Nous avons eu le plaisir de découvrir ensuite que la classification des tétraèdres était en outre le moyen d'étudier la classification des angles tétraèdres. C'est le tétracanthé qui a été le chaînon indispensable à cet élargissement des buts que nous poursuivions. Il est cependant la seule figure pour laquelle nous n'avons pas trouvé de représentation symbolique satisfaisante mais rien de cohérent ne pouvait se faire sans lui. La classification des trièdres, d'une part, l'étude des tétracanthés,

d'autre part, nous ont donc permis d'étudier non seulement les tétraèdres mais tous les autres angles tétraèdres.

Nous offrons pour l'étude de toutes ces figures, à l'exception des tétracanthés, des représentations symboliques frappantes, des résilles qui montrent comment on peut passer d'une forme à une autre, mais encore une terminologie simple: un nombre entier  $n$  ( $0 < n < 6$ ) caractérise les trièdres, une lettre de l'alphabet grec suffit, en général, à caractériser un tétraèdre ou un tétracanthé; enfin une lettre de l'alphabet grec suivie d'un nombre entier  $n$  ( $0 < n < 14$ ) suffit, en général, à caractériser un tétracanthé inversé ou un angle tétraèdre convexe. S'il n'existe que sept formes de trièdres, il y a déjà vingt sept formes de tétraèdres et on ne saurait oublier qu'on compte cent soixante douze formes d'angles tétraèdres. Nous serions heureux si, grâce aux représentations symboliques, aux résilles, à la terminologie, nous avons réussi, malgré l'abondance des formes, à ne pas donner au lecteur une impression de trop accablante complication.

.....

## GLOSSAIRE

### ANGLE TETRAEDRE CONVEXE SUPPLEMENTAIRE D'UN ANGLE TETRAEDRE CONVEXE:

L'angle tétraèdre convexe supplémentaire d'un angle tétraèdre convexe le sommet O est tel que chacune de ses arêtes issues de O soit perpendiculaire à chacune des faces de l'angle tétraèdre initial et située par rapport à cette face du même côté que les deux arêtes du tétraèdre donné qui ne sont pas situées dans le plan de cette face.

### GENRE D'UN TRIEDRE:

Nombre total de ses éléments obtus dièdres et faces.

### GENRE D'UN TETRAEDRE :

Ensemble des genres des 4 trièdres d'un tétraèdre avec, pour trois d'entre eux, les mentions ' et ", ou l'une des 24 lettres de l'alphabet grec avec, pour trois d'entre elles  $\eta$ ,  $\mu$ ,  $\theta$ , les mentions ' et ".

### GENRE D'UN TETRACANTHE, d'un TETRACANTHE INVERSE, d'UN ANGLE TETRAEDRE CONVEXE:

Ensemble des genres des 4 trièdres qui permettent de les caractériser avec au besoin des mentions ' " "" "".

### LIAISON :

Segment de droite joignant sur la résille deux genres de tétraèdres.

### RESILLE GENEALOGIQUE DES TETRAEDRES ou RESILLE des TETRAEDRES:

Figure symbolique dans laquelle chaque genre de tétraèdre est représenté par un point et dans laquelle le segment de droite réunissant deux de ces points symbolise le fait que le nombre total des éléments obtus de ces deux genres de tétraèdres diffère d'une unité et que la disposition structurale des éléments obtus des deux genres de tétraèdres considérés est la même, à l'exclusion du seul élément obtus qui existe dans l'un et qui manque dans l'autre.

### RESILLE DES ANGLES TETRAEDRES CONVEXES:

Figure formée par la juxtaposition de trois résilles des tétraèdres.

### RESILLE DES TETRACANTHES INVERSES:

Figure formée par la juxtaposition de quatre résilles des tétraèdres.

TETRACANTHE:

Angle tétraèdre tel que le prolongement au delà de son sommet d'une quelconque de ses arêtes est situé à l'intérieur du trièdre formé par les trois autres arêtes.

TETRACANTHE INVERSE:

Angle tétraèdre obtenu lorsqu'on substitue à une arête quelconque d'un tétracanthé son prolongement au delà du sommet.

TETRAEDRE ISOCELE I (S):

C'est un tétraèdre possédant trois arêtes égales issues du sommet S.

TETRAEDRE ISOCELE II (S):

C'est un tétraèdre possédant trois dièdres égaux dont les arêtes forment les côtés d'une même facette opposée à S.

TETRAEDRE PARAEQUIFACE:

C'est un tétraèdre tel que l'un de ses sommets S se projette orthogonalement sur le plan de la facette opposée ABC en un point qui est le symétrique de l'orthocentre du triangle ABC par rapport au centre du cercle circonscrit au triangle.

THEME DES DIEDRES OU DES FACES D'UN TRIEDRE, D'UN TETRAEDRE, D'UN ANGLE TETRAEDRE (à l'exception des tétracanthés).

Nombre et disposition des dièdres obtus, des faces obtuses, d'un trièdre, d'un tétraèdre ou d'un angle tétraèdre (à l'exception des tétracanthés).

---

TABLE DES MATIÈRES

|                                                                                                      | pages   |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|
| <u>PLANCHE I</u> Classification des trièdres .....                                                   | 22      |
| <u>PLANCHE II</u> Trièdres déduits d'un trièdre donné lorsqu'on prolonge l'une de ses arêtes .....   | 28      |
| <u>PLANCHE III</u> Genres des trièdres S dont les arêtes passent par trois points donnés A,B,C ..... | 44      |
| <u>PLANCHE IV</u> Genres des tétraèdres construits à partir d'une facette acutangle donnée .....     | 47      |
| <u>PLANCHE V</u> Genres des tétraèdres construits à partir d'une facette obtusangle donnée .....     | 50      |
| <u>PLANCHE VI</u> Classification des tétraèdres.....                                                 | 57      |
| <u>PLANCHE VII</u> Familles de tétraèdres .....                                                      | 62      |
| <u>PLANCHE VIII</u> Familles de tétraèdres .....                                                     | 64      |
| <u>PLANCHE IX</u> Résille des tétraèdres .....                                                       | 65      |
| <u>PLANCHE X</u> Résille des tétraèdres sous forme d'un filet pour tore .....                        | 66      |
| <u>PLANCHE XI</u> Tétraèdres particuliers .....                                                      | 72      |
| <u>PLANCHE XII</u> Angles tétraèdres provenant d'un tétraèdre donné...                               | 88      |
| <u>PLANCHE XIII</u> Tétracanthés inversés provenant d'un tétraèdre de genre donné .....              | 92      |
| <u>PLANCHE XIV</u> Angles tétraèdres convexes provenant d'un tétraèdre de genre donné .....          | 97      |
| <u>PLANCHE XV</u> Filiations des tétracanthés inversés .....                                         | 101-102 |
| <u>PLANCHE XVI</u> Filiations des angles tétraèdres convexes .....                                   | 101-102 |
| <u>PLANCHE XVII</u> Résilles des tétracanthés inversés et des angles tétraèdres convexes .....       | 104     |

Les planches ont été dessinées par M. Jacques BERTIN et par Mademoiselle Anne DUMESNIL.



NOTE : De l'utilité des tétracanthés pour la démonstration de théorèmes relatifs aux tétraèdres.

Considérons un triangle quelconque ABC, soit O le centre du cercle inscrit dans ce triangle et A', B', C' les points de contact du cercle avec les côtés BC, CA, AB. Il est facile de voir que le triangle A'B'C' est toujours acutangle.

Considérons maintenant un tétraèdre quelconque ABCD que nous désignerons par T, et soit O, le centre de la sphère inscrite dans ce tétraèdre: A', B', C', D' sont les points de contact de cette sphère sur les plans BCD, CDA, DAB, ABC. Le point O étant sûrement intérieur au tétraèdre T on sait que l'angle tétraèdre OA'B'C'D' est un tétracanthé. Considérons maintenant le tétraèdre A'B'C'D' que nous désignerons par T'. Puisque OA'B'C'D' est un tétracanthé il en résulte que O est intérieur au tétraèdre T' (voir p. 86), en outre O est centre de la sphère circonscrite à ce dernier tétraèdre, il en résulte que les seuls genres possibles pour le tétraèdre T' sont 0000, 1100, 1111, 2111, 2211". Ces tétraèdres lorsque le centre de leur sphère circonscrite leur est intérieur se comportent donc comme des triangles acutangles en géométrie plane.

Parmi ces tétraèdres, seul 2211" a deux faces obtuses, 2111 en a une, les trois derniers genres n'en ont aucune.

On sait aussi que si un tétraèdre isocèle I (O) a une face obtusangle opposée au sommet O, (voir p. 72) le genre du trièdre O ne peut être que 3, 2, 1, ce qui entraîne que les trièdres homologues du tétraèdre T soient de genres 3, 4, 5. Or, nous savons que nous n'avons pour aucun genre de tétraèdre en même temps plus de deux trièdres possédant les genres 5, 4, 3 combinés avec ou sans répétition ce qui prouve que nous n'aurons jamais en même temps plus de deux tétraèdres isocèles I (O) dont le trièdre O sera de genres 1, 2, 3, ceci qui interdit au tétraèdre T' d'avoir plus de deux facettes obtusangles. Réciproquement, on peut facilement démontrer que si l'on se donne un tétraèdre T' ayant le centre O de sa sphère circonscrite intérieure on peut construire le tétraèdre T qui admettra sûrement la sphère O comme sphère inscrite et non comme sphère ex-inscrite (ceci toujours à cause des propriétés des tétracanthés). De sorte que nous venons de donner une nouvelle démonstration de l'un des théorèmes dus à M. LAGRANGE, théorème dont nous rappelons l'énoncé:

Si le centre de la sphère circonscrite à un tétraèdre est intérieur à ce tétraèdre, deux au moins des facettes du tétraèdre sont acutangles.

Nous pouvons même ajouter que les trièdres de genres 3, 4, 5 ayant chacun deux faces obtuses il est évident qu'aucun tétraèdre ne peut grouper plus de deux trièdres des genres 3, 4, 5 avec ou sans répétition.

Montrons enfin qu'en utilisant les propriétés des tétracanthés, nous pouvons transformer de manière intéressante un autre théorème. démontré indépendamment par MM. CHAMARD et LAGRANGE (voir p. 82). Rappelons l'énoncé de ce théorème:



L'ANALYSE GRAPHIQUE DES DEMONSTRATIONS



## INTRODUCTION

Dans un passage très suggestif d'une communication au Congrès international de Philosophie des Sciences, en 1949, (1) Monsieur A. DENJOY rappelle que "nulle notion n'est plus primitive à l'esprit que celle d'ordre" et "qu'un raisonnement énonce une suite de propositions, dans un certain ordre qui ne peut se changer. Si la proposition 1 implique la proposition 2, impliquant elle-même la proposition 3, intervertir les deux propositions 2 et 3 introduit une pétition de principe".

Des recherches que nous allons maintenant résumer et faites, à l'origine, à un tout autre point de vue, nous ont conduit à constater que le cas ainsi envisagé est peu fréquent et à montrer que les choses se présentent de manière plus complexe.

Chaque démonstration d'un théorème, même très simple, est ramifiée et les rameaux ne sont pas forcément réunies dans un ordre imposé. Une démonstration dont les propositions se présenteraient comme les éléments d'un ensemble totalement ordonné serait d'une simplicité idéale et nous n'en avons pas jusqu'ici d'exemple(2). Ce qu'on peut mettre en évidence c'est que les diverses implications d'un raisonnement sont groupées comme les éléments d'un ensemble partiellement ordonné. Nous verrons que l'analyse graphique des démonstrations, qui dépouille la démonstration de tous ses éléments accessoires, rend sensible ce résultat.

### GRAPHE DU MEMOIRE DE M. VAN DER CORPUT

La première idée d'une présentation graphique de l'enchaînement des idées dans une théorie mathématique assez complexe, nous a été suggérée par l'obligation de comprendre la structure logique d'un mémoire très court, mais ardu, consacré à la théorie des nombres.

On sait que depuis la démonstration du théorème de TCHEBYCHEF (1851-1852) de grands efforts ont été faits pour étudier la répartition des nombres premiers. Les démonstrations obtenues indépendamment par MM. HA-AMARD et de la VALLEE-POUSSIN sont célèbres. Leurs déductions (3) soulignent la difficulté du problème, car elles exigent un appareil mathématique levé.

- 
- 1) A. DENJOY: Congrès international de philosophie des Sciences.  
Fascicule III p.101 - Récurrence et antirécurrence. Act.  
Sc. Hermann, fasc. n° 1137
  - 2) Voir cependant la préface de M. G. BOULIGAND.
  - 3) G. VALIRON: Théorie des fonctions p.505 et ss.

Il est naturel, qu'un mathématicien, soit frappé du contraste entre la simplicité de l'énoncé de nombreux théorèmes relatifs aux nombres premiers et la complexité de leurs démonstrations.

On ne saurait oublier que dans la préface de son célèbre ouvrage "Disquisitiones Arithmeticae" paru en 1801, GAUSS, lui-même, ait écrit que c'est la beauté de l'énoncé suivant:

"THEOREME: - 1 est résidu de tous les nombres premiers de la forme  $4n + 1$  et non résidu de tous les nombres premiers de la forme  $4n + 3$ "(1) qui l'a incité à des recherches approfondies en Arithmétique supérieure. Le contraste entre la simplicité de l'énoncé et le pressentiment de son importance ultérieure ont donc été les stimulants qui ont permis au génie de GAUSS d'édifier un monument mathématique impérissable.

Si l'on aborde les théorèmes relatifs à la répartition des nombres premiers, on peut s'attendre à ce que leurs démonstrations exigent des connaissances mathématiques d'ordre élevé. Cependant un effort a été fait pour résoudre la difficulté par des voies intellectuellement plus simples. Une récente formule, due à MM. SELBERG et ERDOS (2) représente l'heureux résultat de ce genre de recherches. Qualifiée d'élémentaire, parce qu'elle ne fait pas intervenir les théories de l'Analyse supérieure utilisées par MM. HADAMARD et de la VALLEE POUSSIN, cette démonstration est suffisamment ardue pour qu'à la suite d'un exposé oral de M. ERDOS à l'Institut de Mathématiques d'AMSTERDAM, M. VAN DER CORPUT ait eu l'idée de rédiger et de dactylographier un court mémoire qui expose, en les prolongeant, les résultats de MM. SELBERG et ERDOS.

Rappelons que,  $x$  étant un entier positif quelconque, on désigne par  $\vartheta(x)$  la somme des logarithmes des nombres premiers inférieurs ou égaux à  $x$ :

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log p \quad p, \text{ premier}$$

La formule démontrée par M. SELBERG est la suivante:

$$\left[ \frac{\vartheta(x)}{x} + \frac{2}{x \log x} \sum_{p \leq \sqrt{x}} \vartheta\left(\frac{x}{p}\right) \log p \right] \longrightarrow 2 \quad \text{quand } x \longrightarrow \infty$$

partir de cette formule on peut démontrer que  $\frac{\vartheta(x)}{x} \longrightarrow 1$  quand  $x \longrightarrow \infty$

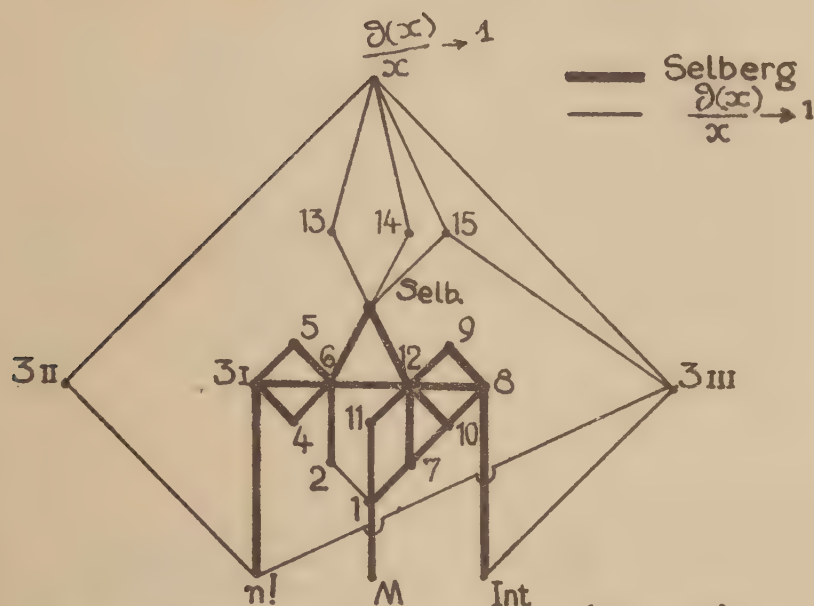
Le mémoire de M. VAN DER CORPUT exige la démonstration de 12 lemmes pour

(1) Ch. Fr. GAUSS: Recherches arithmétiques (édition française 1807) Préface et p.79.

A. SELBERG: An elementary proof of prime number theorem. Annals of Mathematics avril 1949 (vol. 50, 2<sup>e</sup> série, p.305)

# GRAPHE DU MÉMOIRE VAN DER CORPUT

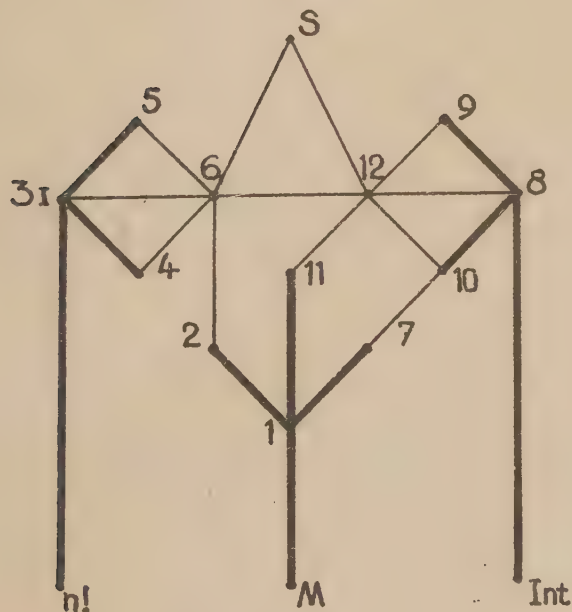
I



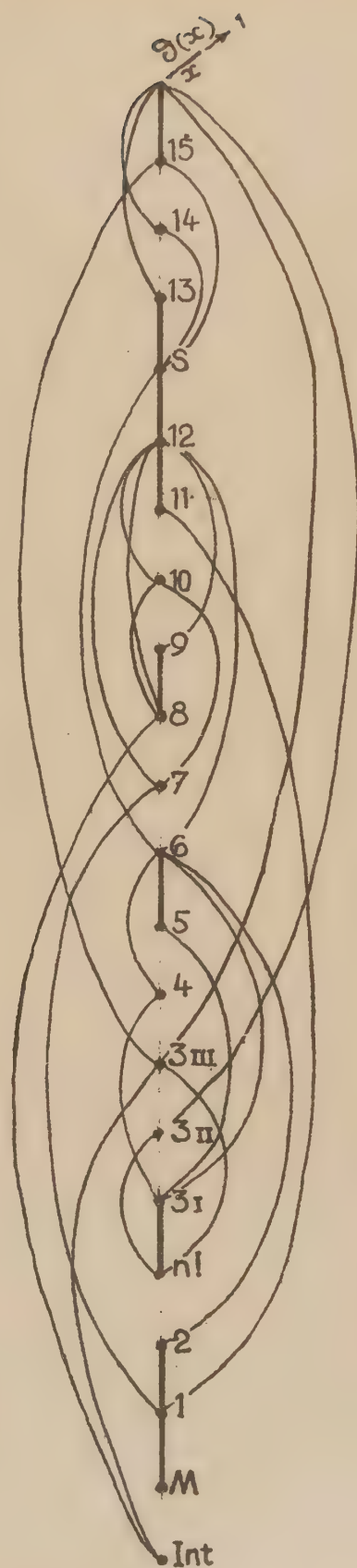
M : Moëbius  
Int: Introduction  
Selb: Selberg

(Fig. 1)

## DÉMONSTRATION DE LA FORMULE DE SELBERG



(Fig II)



(Fig. III)

trouver la formule de Selberg puis la démonstration de trois nouveaux lemmes pour atteindre la formule  $\frac{\partial(x)}{x} \rightarrow 1$  quand  $x \rightarrow \infty$ . (1)

Désirant bien comprendre comment ces lemmes sont articulés entre eux et ayant fait un large usage des graphes (que nous avons appelés résilles) dans un travail sur la classification des tétraèdres, nous avons eu l'idée de placer les numéros de chaque lemme sur une sorte de filet. Les noeuds du filet sont les numéros des lemmes, les fils indiquent comment chaque lemme est relié à ceux qui le précèdent et à ceux qui le suivent. On possède donc ainsi une sorte de schéma de l'enchaînement logique de ces différents théorèmes.

Nous avons disposé dans le bas de la figure, afin d'appliquer les conventions usitées dans la théorie des ensembles partiellement ordonnés (2) les trois points de départ qui permettent de faire la démonstration.

Ce sont les propriétés de  $n!$ , la fonction de MOEBIUS (3) et l'Introduction du mémoire, qui fait intervenir la constante d'EULER. La formule de SELBERG représente un important palier de la démonstration dont le couronnement est l'étude de la limite de  $\frac{\partial(x)}{x}$  quand  $x$  tend vers l'infini. (Planche I, fig.1)

La figure obtenue est complexe, bien que nous ayons essayé de lui donner la forme la plus simple possible; mais il est bien entendu que les liaisons qui relient les lemmes entre eux caractérisent les implications logiques du raisonnement et que ces dernières seraient invariantes si l'on confiait à un autre mathématicien le soin de dessiner indépendamment le graphe de ce même mémoire.

Possédant cette image du mémoire, on peut désormais étudier son architecture de manière tout à fait abstraite; on peut même, oubliant l'objet de tel ou tel lemme, suggérer un nouvel aménagement de l'ordre de leur présentation, sous condition de bien respecter les liaisons qui les réunissent. La voie que l'auteur a choisi pour présenter son mémoire apparaît clairement. Le fait qu'il a voulu traiter en même temps la formule de SELBERG et le théorème relatif à la limite de  $\frac{\partial(x)}{x}$  quand  $x$  tend vers

l'infini a sûrement compliqué l'organisation de son travail. Par exemple, M. VAN DER CORPUT a été obligé de traiter dès le début du mémoire, complètement le lemme 3, or, celui-ci se décompose en trois lemmes distincts, que nous avons notés 3I, 3II, 3III. Les deux derniers n'interviennent qu'après la démonstration de la formule de SELBERG. Si l'on désire seule-

---

(1) Voir Annexe: suite des lemmes du mémoire de M. VAN DER CORPUT

(2) H.B. CURRY: Leçons de logique algébrique Chap. III (les lattices) Vol. II de la Collection "Logique Mathématique" de Madame Paulette Destouches-Février éd. Gauthier Villars 1952.

(3) Voir Annexe: définition de la fonction de Moebius

ment démontrer la formule de SELBERG on peut donc étudier plus tard les lemmes 3II et 3III, et aussi reporter l'Introduction qui ne sert qu'à démontrer le lemme 3III et ne la traiter qu'après avoir démontré le lemme 7. Dans le corps même de la démonstration de la seule formule de SELBERG on voit que l'auteur, ayant commencé par introduire la formule de MOEBIUS, n'en a d'abord tiré que les lemmes 1 et 2 puis, l'a abandonnée pour établir le très important lemme 3 I, afin d'atteindre le difficile lemme 6. A ce moment, il a repris la formule de MOEBIUS, pour démontrer le lemme 7 qui, joint aux éléments de l'Introduction, lui a permis d'établir les lemmes 8, 9, 10. A ce moment, M. VAN DER CORPUT revient à la fonction de MOEBIUS et démontre le lemme 11 qui, joints aux lemmes précédents, lui permet d'atteindre le lemme 12, le plus important de tous. La formule de SELBERG, elle-même, est une conséquence directe des lemmes 6 et 12. L'importance de ces deux derniers lemmes se lit sur la figure: le premier a six liaisons, le dernier en a sept.

Il est également facile de voir que si l'on veut seulement établir la formule de SELBERG on aurait pu commencer par étudier les 4 lemmes qui proviennent de la formule de MOEBIUS, puis les 3 lemmes liés à la constante d'EULER, et, enfin, les 3 lemmes découlant des propriétés de  $n!$ : ce sont les éléments fondamentaux de l'étude, qu'il faut ensuite réunir pour établir les lemmes 6 et 12 (Planche I, fig.2).

La seule considération du graphe permet donc, même à un débutant, de voir la structure logique de la démonstration, elle aide à retenir l'ordre et l'importance des lemmes: elle peut même suggérer des possibilités théoriques de changement dans l'ordre de succession de ces mêmes lemmes; enfin, elle montre que les trois points de départ sont indépendants et peuvent être étudiés dans un ordre arbitraire. La réalisation de ce premier graphe nous montre donc bien qu'il ne s'agit que d'ensembles partiellement ordonnées. S'il nous est arrivé de ne pas marquer tous les numéros des lemmes dans un ordre ascendant, c'est pour la commodité du dessin, pour éviter que des liaisons ne se croisent et afin qu'il puisse devenir un bon instrument de travail.

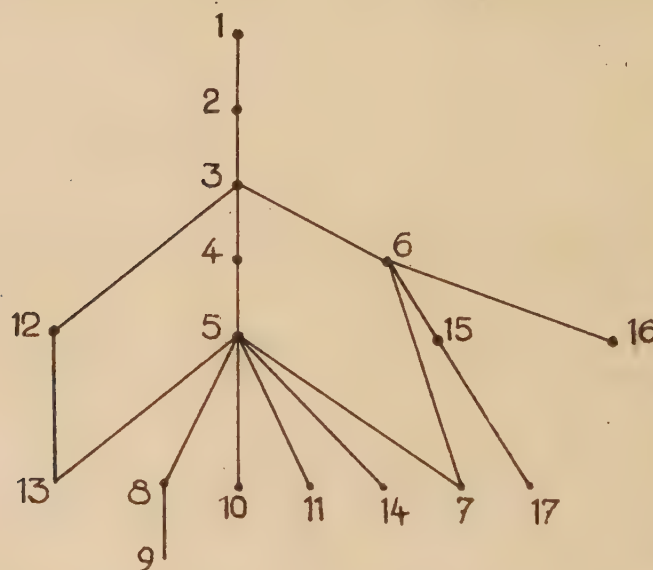
Il serait tentant d'étudier dans le même esprit le mémoire de M. SELBERG; mais l'état de la démonstration, non séparée en lemmes, serait d'une analyse plus difficile; on le comprendra mieux dans un instant. C'est un travail que nous espérons reprendre plus tard. Il conviendrait d'y joindre une analyse des démonstrations de MM. HADAMARD et de la VALLEE POUSSIN lesquelles requièrent des connaissances mathématiques d'une toute autre nature.

Avant de mettre à l'épreuve ce procédé nouveau d'analyse graphique sur quelques exemples soigneusement choisis, rappelons que dès 1911 F. ENRIQUES (1) dessinait une vue synoptique à très grande échelle des diverses branches de la géométrie. En 1930 dans la première édition de

---

(1) Article d'ENRIQUES dans l'Encyclopédie article III, Principes de la Géométrie 1911

Moderne Algebra 1<sup>ère</sup> édition  
1930



1: Ensembles . 2: Groupes . 3: Anneaux . 4: Polynômes . 5: Corps  
6: Groupes . 7: Théorie de Galois . 8: Corps infinis . 9: Corps réels . 10: Corps  
11: Elimination . 12: Théorie g<sup>ale</sup> des idéaux . 13: Idéaux des polynômes . 14: Nbres entiers . 15: Algèbre  
des idéaux polynômes algébriques . 16: Systèmes hypercomplexes . 17: Théorie des représentations

"Moderne Algebra"(2) M.B.L. VAN der WAERDEN a présenté la table des matières de son ouvrage sous forme d'un graphe qui est une sorte d'arbre généalogique montrant les filiations des différents chapitres. Nous le reproduisons (Planche II, fig.1) en lui adjoignant une présentation comparable à celle que nous avons donnée du mémoire de M. VAN DER CORPUT (fig.2). Il s'agit dans le cas de "Moderne Algèbre" d'un graphe englobant une théorie très vaste ; c'est un résumé à grande échelle: il est très remarquable qu'il se présente encore comme un ensemble partiellement ordonné.

### GRAPHE DE THEORIES

Les graphes que nous venons d'examiner font partie de ce que nous proposons d'appeler des Graphes de Théories. En ce qui concerne le graphe du mémoire de M. VAN DER CORPUT, il a été relativement aisé à établir parce que chaque noeud a une signification précise, l'exposé de la théorie indique forcément comment les lemmes sont reliés entre eux. L'intervention de celui qui construit le graphe est donc réduite au minimum, bien qu'elle existe certainement. Nous avons dessiné, afin qu'on s'en rende compte, ce graphe de la manière la plus objective possible, en marquant sur un axe les propositions dans l'ordre où l'auteur les introduit dans son mémoire et les liaisons qui réunissent entre elles les propositions: le résultat ne manque pas d'intérêt, mais il n'aide guère à comprendre la structure du mémoire (Planche I, fig.3).

Il faut insister sur le fait qu'un graphe de théorie, même s'il s'agit d'une théorie complexe, opère sur une matière déjà organisée et d'architecture générale nette; il ne peut y avoir aucun doute sur les liens d'implications qui réunissent les lemmes et les théorèmes: ils sont trop importants pour que la rédaction ne les signale pas explicitement.

Dans la première partie de cet ouvrage, nous avons rencontré deux graphes de théories: celui qui est relatif aux genres des trièdres et la résille généalogique des tétraèdres. Or le premier graphe (2), celui qui montre comment on passe d'un trièdre de genre 0 à un trièdre de genre 6 est d'une telle simplicité (il n'a même pas été dessiné!) qu'il s'agit d'un ensemble totalement ordonné: c'est du reste le seul exemple que nous puissions donner. Mais si nous abordons la construction de la résille généalogique des tétraèdres (2), les choses sont plus compliquées. Pour chaque famille de tétraèdres, l'ensemble des genres se présente déjà comme un ensemble partiellement ordonné, mais nous devons signaler que nos premiers graphes avaient été dessinés sous forme d'ensemble totalement ordonnés, exactement comme un arbre généalogique, sans doute par ce souci

---

(1) B.L. Van der WAERDEN: Moderne Algebra, 1ère édition 1930, Springer Berlin

(2) Introduction p.1

d'ordre si cher à tout mathématicien! Il convient d'ajouter que ces résilles partielles ne se sont vraiment organisées qu'à partir du moment où nous avons renoncé à un ordre total et c'est ce qui nous a permis de trouver la résille elle-même. L'usage que nous avons pu en faire dans des ordres d'idées très variés prouve qu'elle est bien l'instrument de travail que nous voulions construire et qu'elle est mieux encore, car elle synthétise parfaitement les possibilités des nombreuses formes encloses dans la considération du plus simple des polyèdres.

Abandonnant les graphes de théories particulières, il est naturel de songer à mettre en graphes, toute une partie de la géométrie élémentaire, par exemple l'étude des figures semblables ou une partie de l'arithmétique élémentaire: théorie du plus grand commun diviseur et du plus petit commun multiple de deux ou de plusieurs nombres.

De tels graphes seraient précieux, nous l'expliquerons bientôt, mais il faut remarquer que si l'on descend l'échelle des théorèmes il faudra faire choix d'une axiomatique et proscrire, pour en dessiner le graphe, toute démonstration présentant un caractère intuitif. Sans les axiomes d'HILBERT et de PEANO on ne saurait représenter graphiquement les démonstrations du début de la Géométrie ou du début de l'Arithmétique.

Signalons enfin que si l'on faisait l'étude de la théorie du p.g.c.d. de deux nombres entiers par la méthode des divisions successives et l'étude de la théorie du p.g.c.d. de deux polynômes on pourrait comparer les graphes obtenus: on s'apercevrait que, s'ils ont été entrepris au niveau de la divisibilité pour les entiers ou pour les polynômes, ces graphes seraient identiques. Ceci n'a rien de fortuit, car des recherches récentes ont montré que ces deux théories peuvent s'unifier au moyen de la notion d'anneau euclidien (2). Il y a donc des cas où l'on peut théoriquement prévoir que deux graphes seront identiques.

### GRAPHES DE THEOREMES

Nous allons exposer l'objet principal de cette étude. Ce nouveau problème, qui procède d'une analyse plus fine que le précédent, sera, par cela même, d'un plus grand intérêt: nous pourrions atteindre l'analyse même d'une démonstration et par suite la structure du raisonnement mathématique.

Avant de songer à construire ce graphe il faudra noter très soigneusement toutes les parties de l'hypothèse  $H_1 H_2 \dots$  puis les théorèmes qui, se substituant aux axiomes, fournissent le moyen d'étudier directe-

---

(1) Voir Planches VII, VIII et IX

(2) G. BOULIGAND: Les principes de l'analyse géométrique.  
Tome II, Fasc. A p.57 Vuibert édit. 1950

P. DUBREIL: Algèbre chap. VI 1ère édit. 1947. Gauthier Villars édit.

ment le problème ou le théorème considéré.

En général, on aura intérêt à réduire au minimum le nombre de ces théorèmes, nous reviendrons sur ce point.

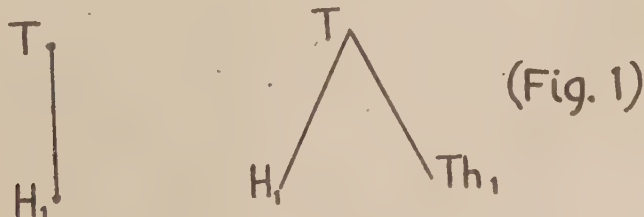
On notera aussi la conclusion ou les conclusions qu'on désire établir. Dans la plupart des cas il conviendra d'ajouter aux hypothèses et aux théorèmes l'indication de la méthode utilisée pour établir le théorème. Elle sera notée dans la légende au même titre que les hypothèses et les théorèmes auxiliaires; on la marquera par un point sur le graphe. On ne saurait attacher trop d'importance à cette indication: elle met en évidence, par une sorte de convention symbolique, l'idée à partir de laquelle le théorème sera démontré. Un théorème peut recevoir plusieurs démonstrations distinctes suivant la nature de l'idée de départ; nous en donnerons ultérieurement des exemples. S'il s'agit d'un théorème de structure complexe plusieurs idées indépendantes les unes des autres devront être groupées convenablement dans le seul but d'en assurer la démonstration. Ce sera un des mérites de l'analyse graphique de la démonstration de permettre une reconstitution presque instantanée des éléments fondamentaux de la conquête d'un théorème et de représenter d'une manière stable le choix des démarches que comporte chaque démonstration.

Les éléments que nous venons de nommer, à l'exception de la conclusion, seront tous notés et placés sur une ligne horizontale qui sera, en quelque sorte, la ligne de départ de la pensée constructive, la conclusion se trouvant au point le plus haut. Lorsque le graphe sera construit, on s'efforcera de choisir pour tous ces points, placés sur une même droite horizontale, l'ordre le meilleur, celui qui rendra la figure la plus simple, celui qui évitera (la chose n'est pas toujours possible) que deux liaisons ne se croisent.

Supposons qu'on veuille étudier un théorème relatif à un nombre premier  $p$ ; il peut suffire de le marquer comme une hypothèse  $H$ . Pour se servir utilement de cette hypothèse il pourra être indispensable de la remplacer par le fait que, si  $p$  est premier, il est premier à  $(p-1)!$ . On peut ériger cette remarque en un théorème  $T$ , mais si l'on désire expliciter très minutieusement la démonstration on peut ne pas regarder  $T$  comme une conséquence immédiate du fait que  $p$  est premier mais y voir une conséquence du théorème:

Th: Si un nombre  $p$  est premier à tous les facteurs d'un produit il est premier à ce produit, ce qui entraîne,  $p$  étant premier, qu'il est premier à  $(p-1)!$

Dans ces conditions les départs des deux graphes seront différents.



Différence purement superficielle! En fait, dans le premier cas, on sera parti d'un niveau plus élevé que dans le deuxième. On conçoit même que pour une démonstration d'un niveau encore plus élevé, on puisse décider de remplacer désormais l'hypothèse "p premier" par le théorème T qui est une condition nécessaire et suffisante pour que p soit premier; dans ces conditions on pourrait supprimer  $H_1$  et lui substituer T sur la ligne de départ. Au contraire si l'on démontre un théorème à des débutants, il sera bon de considérer T comme une conséquence de la donnée H et du théorème  $Th_1$ .

On voit que si l'on possédait un graphe général du début de l'arithmétique, cette difficulté s'évanouirait. En effet, on verrait immédiatement que, dans le deuxième cas, il s'agit d'un départ plus élémentaire que dans le premier. Rien n'interdirait même qu'on désire expliciter le théorème  $Th_1$ , mais ceci n'est pas souhaitable, et on peut convenir désormais qu'on ne retiendra parmi les théorèmes qu'on ajoute aux hypothèses, que ceux qui seront les plus proches du résultat, quitte, plus tard, à compliquer légèrement le graphe, si l'on veut faire une démonstration d'un niveau plus élémentaire. Si l'on possédait un graphe général de l'Arithmétique élémentaire ou de la géométrie élémentaire, on pourrait donc, résolvant un problème, attribuer à la démonstration une certaine "hauteur" dans l'étude générale de l'Arithmétique ou de la Géométrie. Il va de soi que le choix des éléments de départ, au besoin très élaborés déjà, choix plus ou moins heureux, plus ou moins élevé, pourra conduire à plusieurs démonstrations distinctes du même théorème. La comparaison des graphes pourra montrer quelle est en réalité la "hauteur" du théorème et la démonstration qui lui est le plus adéquate: les graphes rendront ainsi un service important. Nous donnerons par la suite deux exemples.

Une difficulté peut se présenter relativement au numérotage des diverses parties de la démonstration. Sur l'une des liaisons d'un graphe deux mathématiciens peuvent marquer les étapes du raisonnement de manière différentes, le premier n'utilisera qu'un point, le deuxième en marquera deux; ces graphes ne seront pas quand même essentiellement différents: ce qui caractérisera un graphe, nous le verrons, ce sont ses articulations, le fait qu'il est ouvert ou fermé, le fait que la partie fermée contient ou ne contient pas de contradiction: la complexité du graphe résultera aussi naturellement du nombre élevé des liaisons qui partent ou qui aboutissent à un même point, et aussi du fait que certaines liaisons sont croisées ce qui se produira d'autant plus facilement qu'on aura fixé les positions des points de départ et de la conclusion.

Nous allons maintenant mettre en évidence ces diverses particularités en traitant parmi beaucoup d'autres, quelques exemples spécialement significatifs.

# GRAPHE DE LA PROPRIETES ASSOCIATIVE DE L'ADDITION

Pour montrer l'importance des graphes de théorèmes proches des axiomes fondamentaux nous étudierons d'abord la propriété associative de l'addition des nombres entiers, en utilisant les axiomes de PEANO.

On se souvient que ces axiomes sont les suivants:

- A<sub>1</sub> 0 est un nombre.
- A<sub>2</sub> A tout nombre x est associé un autre nombre x' appelé successeur de x.
- A<sub>3</sub> Deux nombres ne peuvent avoir le même successeur.
- A<sub>4</sub> 0 n'est le successeur d'aucun nombre.
- A<sub>5</sub> Toute propriété qui appartient à 0 ainsi qu'au successeur d'un nombre ayant cette propriété, appartient à tous les nombres.

Les axiomes de PEANO définissent les nombres ordinaux entiers à un isomorphisme près; mais si on ajoute que m étant un nombre

$$\begin{aligned} m + 0 &= m \\ m + 1 &\text{ est le successeur de } m \\ m + (n + 1) &\text{ est le successeur de } m + n \end{aligned}$$

c'est-à-dire :  $m + (n+1) = (m+n) + 1$  (1) D  
On peut définir la somme de  $m + n$  quelque soit n.

Nous voulons maintenant étudier la propriété associative, c'est-à-dire démontrer que:

$$n + (p + a) = (n + p) + a \quad (2)$$

D'après D la propriété est vraie pour  $a = 1$ , supposons la vraie pour  $\bar{a}$  et démontrons la pour  $\bar{a} + 1$  ( $T_{\bar{a}+1}$ )

$$T_{\bar{a}} \quad n + (p + \bar{a}) = (n + p) + \bar{a} \quad (3)$$

Ajoutons 1 aux deux membres de la relation (3)

$$[n + (p + \bar{a})] + 1 = [(n + p) + \bar{a}] + 1 \quad (4)$$

Appliquant D au deuxième membre on a :

$$[n + (p + \bar{a})] + 1 = (n + p) + (\bar{a} + 1) \quad (5)$$

Appliquant maintenant D au premier membre:

$$n + [(p + \bar{a}) + 1] = (n + p) + (\bar{a} + 1) \quad (6)$$

Enfin appliquant encore D au crochet du premier membre:

$$n + [p + (\bar{a}+1)] = (n+p) + (\bar{a}+1) \quad (7)$$

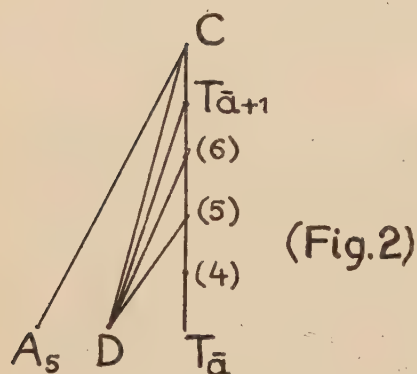
qui étend la propriété à  $\bar{a}+1$ .

Si maintenant nous appliquons la relation de récurrence  $A_5$  nous voyons que le résultat est général (1).

Dessignons maintenant le graphe.

Les données sont  $T_a$ , D,  $A_5$ . La conclusion sera désignée par C.

Les numéros des égalités successives sont reportés directement pour simplifier (fig.2).



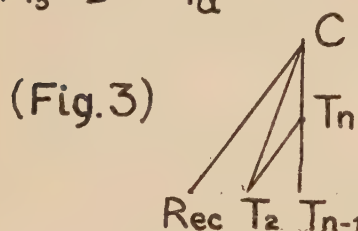
Pour faire une comparaison on pourrait établir le graphe du théorème de Chasles relativement à la mesure algébrique de la somme de deux vecteurs consécutifs portés sur un axe.

$T_2$ : théorème pour deux vecteurs

$T_{n-1}$ : théorème pour  $(n-1)$  vecteurs

$T_n$ : théorème pour  $n$  vecteurs

Rec : raisonnement par récurrence.



Ce dernier graphe (fig.3) est plus simple que le précédent parce que D a été utilisé quatre fois pour établir la figure 2, mais la parenté des deux graphes est visible.

### GRAPHES DU THEOREME DE FERMAT (Planche III)

Nous étudierons trois démonstrations classiques de ce théorème: la première, très élémentaire, utilise les propriétés des restes de la division par  $p$  (nombre premier et premier à  $a$ ) de la suite des multiples de  $a$ ; la deuxième fait état de la formule du binôme; la troisième, la plus simple, utilise la formule du binôme généralisée (2).

(1) G. BOULIGAND: La Mathématique et son unité - Payot 1947, p.225

(2) J.A. SERRET: Cours d'Algèbre supérieure éd. de 1879 tome II n°293 p. 30-32

Si l'on examine les trois graphes on est frappé de l'impression de lourdeur que donne la première démonstration. Le fait de supposer que non seulement  $p$  est premier, mais qu'il est premier à  $a$  est une hypothèse inutile à la conclusion: mais indispensable au caractère élémentaire de cette démonstration; elle est à l'origine de la complication du graphe. Au contraire, utilisant la formule du binôme il semble qu'on ait enfin trouvé l'instrument indispensable à une démonstration élégante. C'est le fait que le nombre des combinaisons de  $p$  lettres  $k$  à  $k$  est divisible par  $p$ , si  $p$  est premier, qui montre comment on peut caractériser algébriquement l'hypothèse que  $p$  est premier et qui suggère d'utiliser la formule du binôme pour démontrer des théorèmes relatifs aux nombres premiers.

Dans le même esprit de comparaison, mais dans un domaine tout à fait élémentaire, nous avons entrepris d'étudier neuf démonstrations d'un même théorème.

### GRAPHES D'UN THEOREME RELATIF AU TRIANGLE ISOCELE

**THEOREME:** Si dans un triangle une bissectrice est en même temps médiane le triangle est isocèle (Planche IV)

Pour caractériser ces diverses démonstrations nous avons montré quel est leur niveau parmi les théorèmes fondamentaux de la géométrie élémentaire.

La première démonstration, extraite d'un traité de géométrie qui a au son heure de célébrité, se place, non seulement avant le postulat d'EUCLIDE, mais avant les cas d'égalité des triangles, elle ne fait état que de la symétrie par rapport à un point. L'aspect compliqué du graphe montre que ce tour de force peut plaire à un mathématicien mais qu'il n'est pas recommandable pour des débutants.

Les graphes ne deviennent vraiment simples que si le postulat d'EUCLIDE a été traité. La démonstration qui utilise la théorie des parallélogrammes donne un graphe ouvert, un véritable arbre; ce qui montre de manière sensible que la théorie des parallélogrammes est bien le niveau du théorème. Il est normal que le graphe se simplifie encore si l'on suppose connu le théorème de la bissectrice d'un triangle (n° VIII).

Certains de ces graphes portent non seulement des parties fermées mais la mention contradiction; ceci provient du fait qu'à un moment donné la démonstration bifurque: deux alternatives se présentent (elles sont marquées en pointillé); l'une aboutit à la conclusion, l'autre à une contradiction avec les données du problème.

C'est la nécessité de marquer cette contradiction qui nous a obligés d'indiquer la mention  $\Delta$  parmi les données; ce qui signifie: le triangle est supposé construit au départ de la démonstration.

# GRAPHES DU THÉORÈME III DE FERMAT

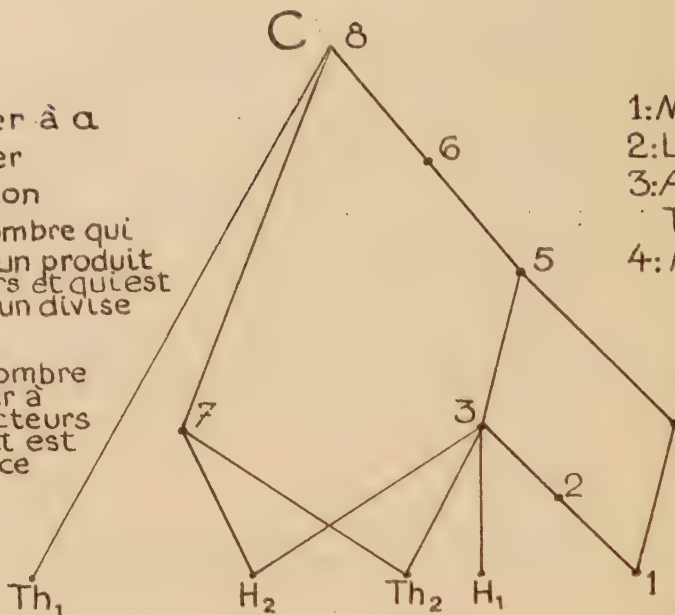
$H_1$ :  $p$  premier à  $a$

$H_2$ :  $p$  premier

$C$ : conclusion

$Th_1$ : Tout nombre qui divise un produit de 2 facteurs et qui est premier à l'un divise l'autre.

$Th_2$ : Tout nombre premier à tous les facteurs d'un produit est premier à ce produit.



1: Multiples de  $a \dots (p-1)a$

2: Les divisés par  $p$

3: Aucun reste nul

Tous différents

4:  $M$  = produit de ces multiples

5:  $M \equiv (p-1)! \pmod{p}$

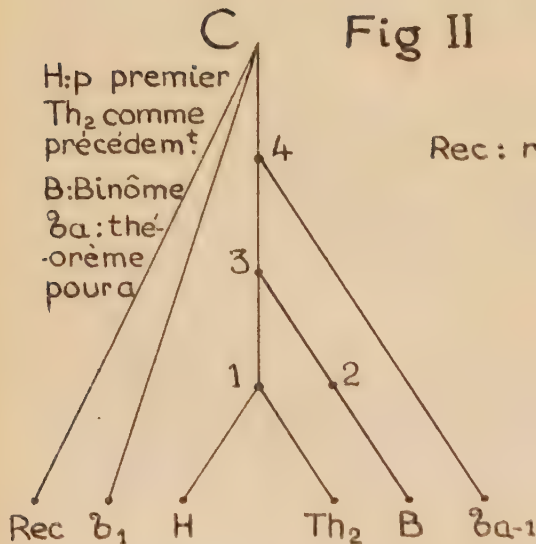
6:  $(a^{p-1}-1)(p-1)! \equiv 0 \pmod{p}$

7:  $p$  premier à  $(p-1)!$

8:  $a^{p-1}-1 \equiv 0 \pmod{p}$

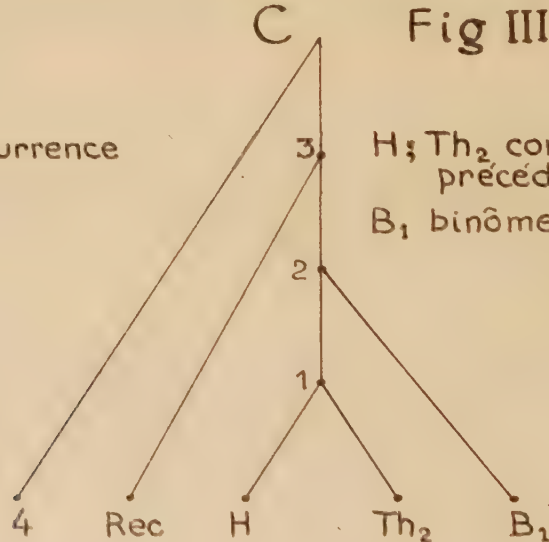
Fig 1

Fig II



Rec: récurrence

Fig III



$H$ ;  $Th_2$  comme précédemment

$B_1$  binôme généralisé

1  $p$  premier à  $k!$  si  $k < p$

2  $(a-1+1)^p = (a-1)^p + \frac{p}{1}(a-1)^{p-1} + \dots$

3  $a^p \equiv (a-1)^p + 1 \pmod{p}$

4  $a^p - a \equiv (a-1)^p - (a-1) \pmod{p}$

1  $p$  premier à  $k!$  si  $k < p$

2  $(u+v)^p \equiv u^p + v^p \pmod{p}$

3  $(u_1 + u_2 + \dots + u_a)^p \equiv u_1^p + u_2^p + \dots + u_a^p$

4  $u_1 = u_2 = \dots = u_a = 1$

Cette supposition n'est pas dangereuse si cette existence du triangle reste d'ordre toute théorique, d'ordre intellectuel en somme, mais le devient si la démonstration utilise ultérieurement une construction qui fait état de l'existence de ce triangle. Par exemple, on peut être tenté d'utiliser la propriété caractéristique de la bissectrice d'un angle (Planche IV, n°IV). Il faudra faire une construction qui fasse état évidemment de l'existence du triangle; c'est ici que le raisonnement peut manquer de rigueur parce que rien ne prouve que les pieds des hauteurs des triangles DAB et DAC issues de D pied de la bissectrice du triangle ABC, soient tous deux situés entre A et B et entre A et C. Si l'on oubliait cette complication on pourrait croire que cette démonstration se place avant le postulat d'EUCLIDE, or il n'en est rien, puisqu'elle suppose connu le fait que la somme des angles d'un triangle est égale à deux droits.

Nous devons avouer que c'est cette inquiétude, relativement à l'utilisation du postulat d'EUCLIDE, qui nous a fait penser que la démonstration devait être moins simple qu'elle ne le paraissait; pour bien marquer qu'on pouvait aboutir à une contradiction, nous avons donc dû marquer explicitement les cas où l'existence du triangle fait partie des hypothèses. La démonstration N°VI a le grand mérite de ne rien supposer relativement à l'existence du triangle: on le construit tout en faisant la démonstration. La mention  $\Delta'$  accompagnée d'une flèche mentionne ce fait, de sorte que le graphe met en évidence le caractère exceptionnel de la démonstration.

#### GRAPHE D'UN THEOREME ELEMENTAIRE DE GEOMETRIE DANS L'ESPACE

(Planche V)

Nous donnons ce graphe pour qu'on puisse bien comprendre l'effort intellectuel qu'un tel enchaînement d'idées impose à l'esprit.

Cette démonstration est difficile en partie parce que deux fois de suite une contradiction s'introduit. On simplifierait beaucoup le graphe, et par suite la démonstration, en la divisant en deux parties distinctes:

- 1°)  $D_1$  et  $D_2$  sont situés dans un même plan
- 2°) dans ce plan  $D_1$  est parallèle à  $D_2$ .

Plus élémentairement encore, si l'on démontre le théorème suivant:

THEOREME: Si dans un parallélogramme les diagonales sont égales c'est un rectangle.

Il y a intérêt à introduire le parallélogramme sous forme de trois hypothèses distinctes:

# IV THÉORÈME : Si dans un triangle ABC une bissectrice AD est en même temps médiane le triangle est isocèle.

APRÈS LE THÉORÈME DE THALÈS

AVANT LE POSTULAT d'EUCLIDE

APRÈS LE POSTULAT D'EUCLIDE

Sym. par rapport à 1 point

Cas d'égalité des  $\Delta$

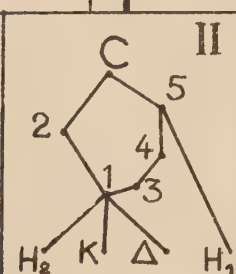
Somme des angles d'un triangles

Parallélogrammes

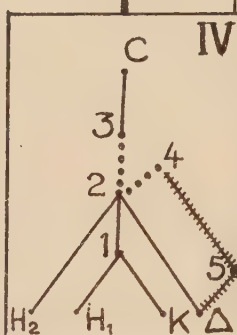
Cas douteux

Th. bissect. d'un  $\Delta$

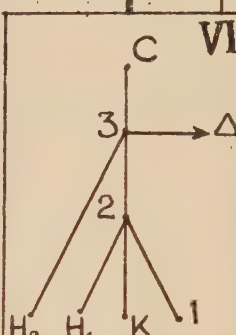
Faisceau harmonique



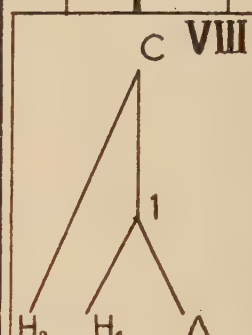
K: A' symétrique de A par rapport à D  
1  $\Delta ABD = \Delta A'DC$   
2  $A'C = AB$   
3  $\widehat{BAD} = \widehat{DA'C}$   
4  $\widehat{DA'C} = \widehat{DAC}$   
5  $A'C = AC$



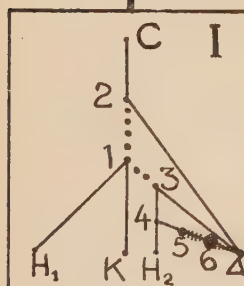
K: Mener de D les  $\perp$  à AB et à AC  
1  $DI = DJ$   
2  $\Delta BDI = \Delta CDJ$   
3  $B = C$   
4  $B + C = \pi$   
5 Contradiction



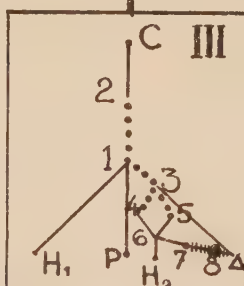
1 E sur la bissectrice de l'angle BAC  
K par E on mène les  $\parallel$  à AB et à AC  
2 ABEC losange  
3 AE médiane



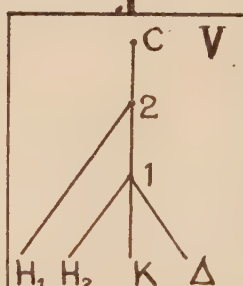
$$1 \frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC}$$



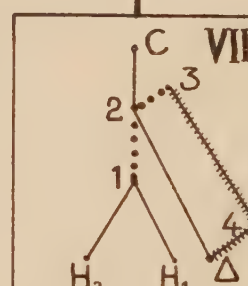
K: Par D  $\perp$  AD  
1  $\Delta ABC'$  isocèle  
2 B'en B, C'en C  
3  $B' \neq B, C' \neq C$   
4 BB' et CC' sym. par rapport à D  
5  $AB \parallel AC$   
6 Contradiction



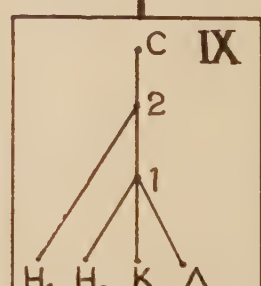
P Pliage aut. de AD  
1 C' vient sur la demi-droite AB  
2 C'en B  
3  $C' \neq B$   
4 C' entre A et B  
5 C' au-delà de B  
6  $\Delta DBC'$  isocèle  
7  $B + C = \pi$   
8 Contradiction



K: A' symétrique de A par rapport à D  
1  $\Delta ABA'C$  plg.  
2  $\Delta ABA'C$  losange



1 cas douteux  
2  $B = C$   
3  $B + C = \pi$   
4 contradiction



K  $AL \parallel BC$   
1 Faisc. harm.  
2 2 rayons conj. perpendiculaires.

H<sub>1</sub>: AD bissectrice

K: Construction

P: Pliage

H<sub>2</sub>: AD médiane

$\Delta$ : existence du  $\Delta ABC$

C: Conclusion

$\rightarrow \Delta'$ :  $\Delta ABC$  construit au cours de la démonstration

# THÉORÈME : Deux droites distinctes parallèles à une troisième sont parallèles entre elles

V

$H_1: D_1 \parallel \Delta$

$H_2: D_2 \parallel \Delta$

$H_3: D_1$  dist. de  $D_2$

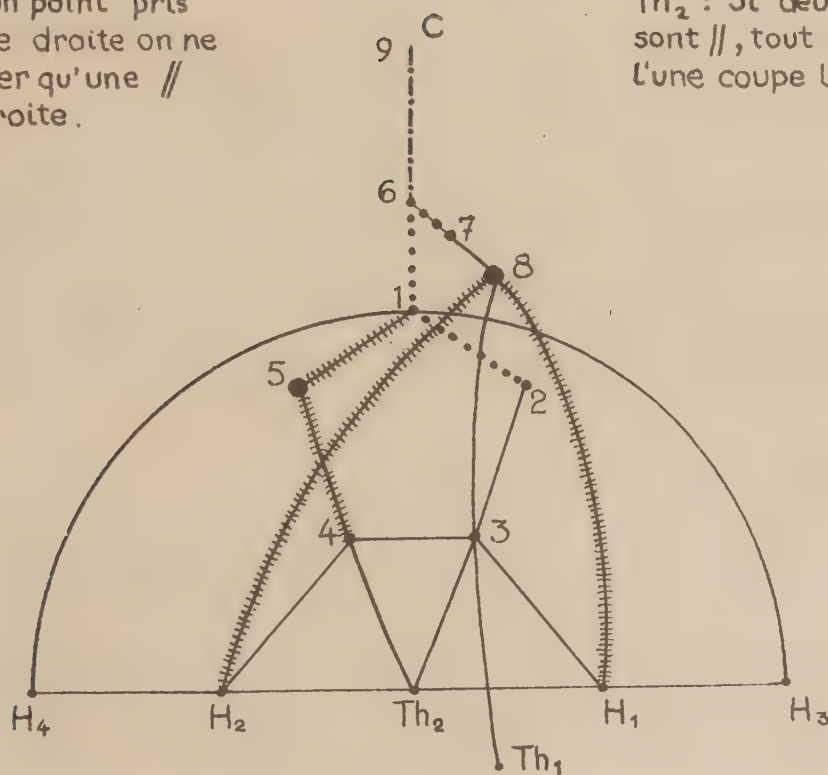
$H_4: M_1$  est sur  $D_1$

$Th_1$ : par un point pris  
hors d'une droite on ne  
peut mener qu'une  $\parallel$   
à cette droite.

Le graphe est une figure  
de l'espace

(7, 8,  $Th_1$  ne sont pas  
dans le plan du tableau)

$Th_2$ : Si deux droites  
sont  $\parallel$ , tout plan qui coupe  
l'une coupe l'autre.



1 Plan P déterminé par  $M_1$  et  $D_2$

2 P coupe  $D_1$

3 P coupe  $\Delta$

4 P coupe  $D_2$

5 Contradiction

6 P contient  $D_1$

7  $D_1$  coupe  $D_2$

8 Contradiction

9  $D_1 \parallel D_2$

- 1° - c'est un quadrilatère convexe
- 2° - deux côtés sont parallèles
- 3° - ces deux côtés sont égaux

De fermé le graphe devient ouvert, et la démonstration bien plus naturelle

Pour terminer cette étude nous étudions le graphe d'un théorème de géométrie élémentaire assez complexe.

Le fait que quatre points de départ distincts devront être utilisés nous conduira à des résultats qui rappelleront ceux que nous avons obtenus en dressant un graphe de théorie, celui du mémoire de M. VAN DER CORPUT.

#### GRAPHE DU THEOREME DE FEUERBACH (Planche VI)

L'idée fondamentale est d'utiliser une inversion afin d'étudier les positions relatives des cercles inscrits et exinscrits dans un triangle avec le cercle d'EULER relatif à ce même triangle. On choisit cette inversion de manière que le cercle inscrit et le cercle exinscrit dans l'angle A du triangle ABC soient globalement invariants, ce qui entraîne que le cercle d'EULER  $\Omega$ , se transforme en une droite  $\Omega'$ . La démonstration se divise en deux parties indépendantes:

- 1° - déterminer le point où  $\Omega'$  coupe BC.
- 2° - déterminer la direction de  $\Omega'$ .

Pour résoudre la première question on utilise, en le transformant le fait que A, I, O, O' forment une division harmonique, ce qui permet de démontrer que  $\Omega'$  passe par I (numéros 3, 4, 5, 6 du graphe).

Pour trouver la direction de  $\Omega'$  on commence par utiliser une propriété de l'inversion d'un cercle passant par le pôle d'inversion afin de mettre en évidence que  $\Omega'$  est parallèle à la tangente en A' au cercle  $\Omega$ , ce qui incite à utiliser en 8 une nouvelle homothétie, laquelle prouve que  $\Omega'$  est parallèle à la tangente en A au cercle ABC, on y ajoute cette idée, absolument indépendante des précédentes que la tangente en A au cercle ABC et la droite BC sont antiparallèles à AB et à AC, ce qui démontre que  $\Omega'$  est parallèle à la deuxième tangente commune intérieure aux cercles O et O'.

Reprenant alors le point 6 du graphe resté en suspens, on achève la démonstration en prouvant que justement  $\Omega'$  est la deuxième tangente commune intérieure aux deux cercles.

Nous pensons que la démonstration d'un tel théorème est assez complexe pour montrer comment s'organise une recherche, comment on groupe les idées distinctes qu'on sera amené à fondre pour mettre en évidence une propriété nouvelle.

Le caractère ramifié du raisonnement complet est très nettement en évidence, toute une partie du graphe est ouverte, on ne peut le dessiner qu'en quittant le papier. Seul un dessin animé pourrait rendre ceci parfaitement sensible. C'est en cette multiplicité de points de départ que réside la difficulté d'inventer la démonstration et même de la retrouver. Il faut abandonner une idée qui était devenue familière, qui avait déjà donné des résultats (peut être même tous les résultats qu'elle était susceptible de donner, mais on pouvait ne pas le savoir) pour aborder une autre idée, toute différente, qu'il faut développer à son tour et rapprocher de la première de façon à obtenir des conséquences communes.

Remarquons qu'on aurait pu supprimer sur la branche 3,4,5,6 le point 4, ce qui aurait permis de dessiner un graphe plus condensé, mais comme nous le disions plus haut, ce graphe ne serait, en somme, pas différent du précédent.

Il est bien évident aussi que le graphe étant construit, rien n'empêche d'affiner la démonstration, de ne pas passer brutalement de 2 à 3, on peut remarquer que la construction de l'inverse de H introduit une division harmonique, qui n'est que la projection d'une division harmonique tracée dès qu'on construit la figure.

L'expérience prouve qu'on retient plus difficilement la deuxième partie de la démonstration et nous pensons justement que ceci est dû à l'indépendance des points 7,8,10: plus on doit grouper d'idées, plus le théorème devient difficile à établir.

Le graphe met aussi en évidence le caractère indépendant des deux parties de la démonstration. Sur chaque branche du graphe on ne saurait changer l'ordre des propositions, mais on peut commencer par démontrer que  $\Omega$  est parallèle à la deuxième tangente intérieure et commencer aussi par attirer l'attention sur le fait que cette deuxième tangente et AT sont anti-parallèles à AB et à BC. Ceci souligne que la démonstration d'un théorème ne possède qu'un ordre partiel qui ne prend le caractère d'un ordre total que si la démonstration devient écrite ou parlée.

## CONCLUSION

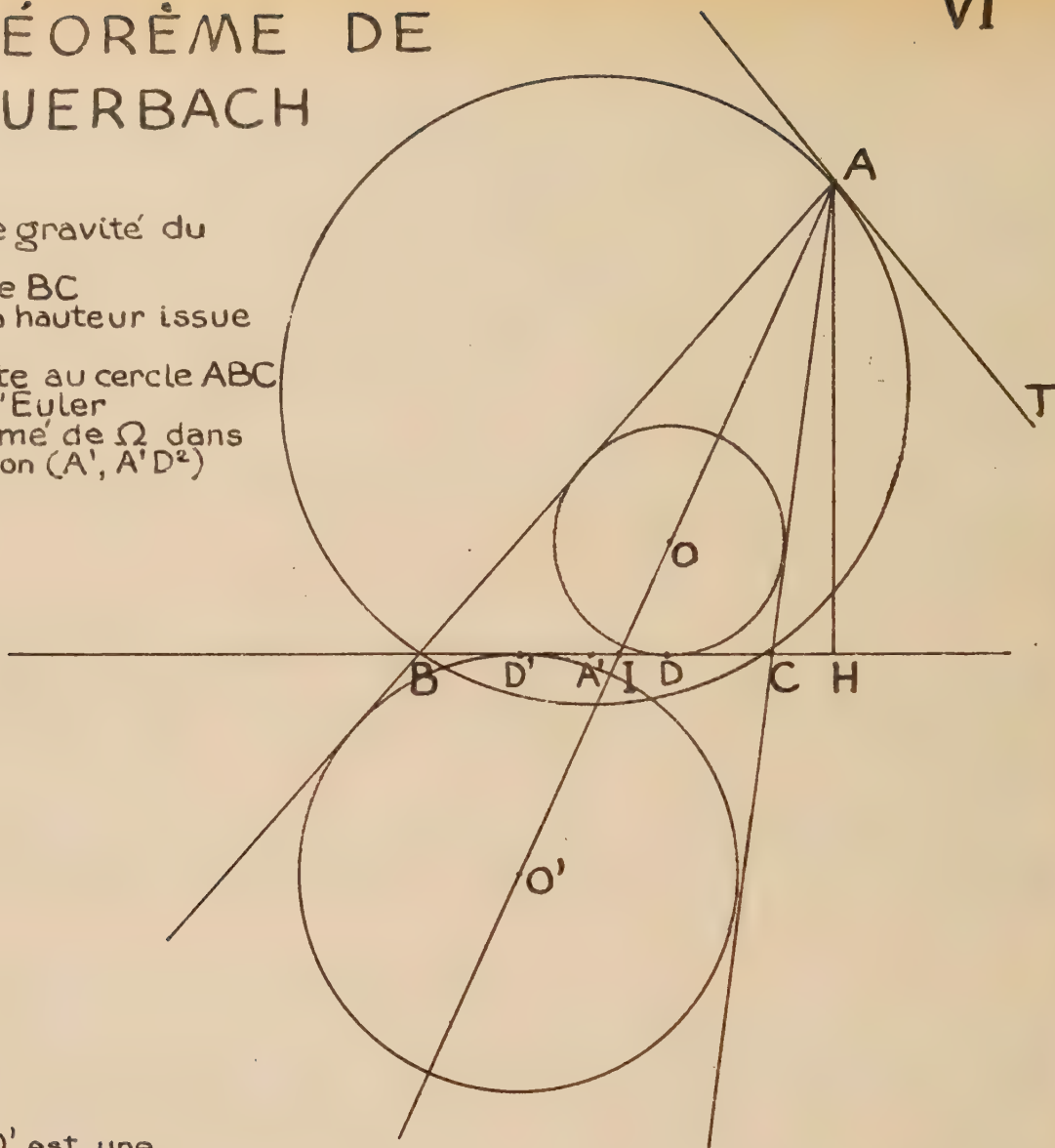
Nous espérons que les graphes que nous venons de construire n'intéressent pas seulement les mathématiciens mais certains de nos élèves à partir des classes de Mathématiques et de Philosophie.

Non seulement les graphes pourront nous aider à travers la "hauteur" d'une démonstration mais encore, lorsque la démonstration aura été choisie entre plusieurs autres, nous permettront-ils d'envisager simultanément ce que la démonstration ne présente que successivement, ils seront

# THÉORÈME DE FEUERBACH

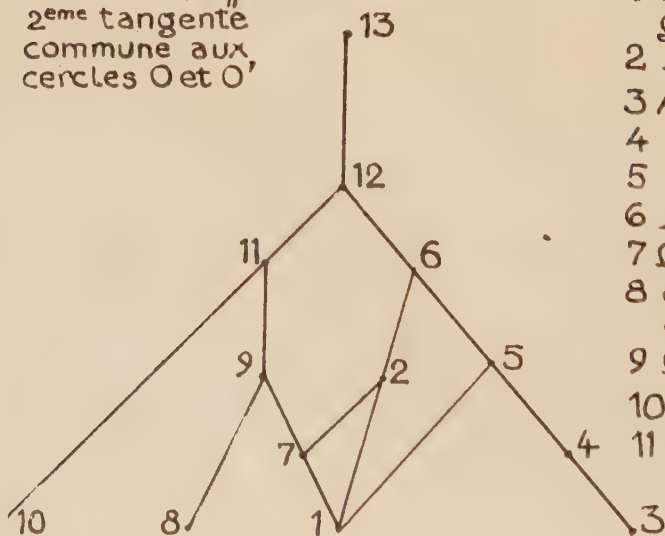
VI

G centre de gravité du  $\triangle ABC$   
 $A'$  milieu de BC  
 H pied de la hauteur issue de A  
 $AT$  tangente au cercle ABC  
 $\Omega$  cercle d'Euler  
 $\Omega'$  transformé de  $\Omega$  dans l'inversion  $(A', A'D^2)$



De 2 à 6:  $\Omega'$  est une droite qui passe par I

De 7 à 11:  $\Omega' \parallel$  à la 2<sup>ème</sup> tangente commune aux cercles O et O'



- 1 Inversion  $(A', A'D^2)$  (O) et (O')
- 2  $\Omega$  se transforme en une droite  $\Omega'$
- 3  $AIOO'$  div. harmonique
- 4  $HIDD'$  div. harmonique
- 5 H se transforme en I dans l'inversion
- 6  $\Omega'$  passe par I
- 7  $\Omega' \parallel$  tangente en A' à  $\Omega$
- 8 cercle ABC et  $\Omega$  ont G comme centre d'homothétie
- 9  $\Omega' \parallel$  tangente en A au cercle ABC: AT
- 10 AT et BC antiparallèles à AB et AC
- 11  $\Omega'$  et BC antiparallèles à AB et AC
- 12  $\Omega'$  est la 2<sup>ème</sup> tangente commune aux cercles O et O'
- 13  $\Omega$  est tangent aux cercles O et O'

pour nous un tableau synoptique de la démonstration.

Ces tableaux nous pourrions les lire de telle manière qu'on retrouve les points de départ et les implications de la démonstration. Si le graphe matérialise l'aspect global de la démonstration, les numéros des noeuds permettent, eux, de recréer le cheminement de la pensée.

En terminant ce court exposé nous voulons exprimer toute notre reconnaissance à MM. les Professeurs BOULIGAND et DUBREIL.

En Juillet dernier, M. BOULIGAND nous avait conseillé de nous intéresser au mémoire de M. VAN DER CORPUT, espérant que son analyse pourrait faire le sujet d'une deuxième thèse. C'est la difficulté de ce court mémoire qui nous a donné l'idée de construire pour lui un graphe de théories et d'appliquer ensuite ce procédé à l'analyse de la démonstration d'un théorème et nous nous réjouissons que ce sujet soit devenu celui de notre deuxième thèse.

M. BOULIGAND nous a donné, durant ces cinq derniers mois, les plus précieux conseils, avec une bonté et un dévouement qu'il est difficile d'imaginer. Nous le remercions de nous avoir sacrifié si généreusement beaucoup de son temps.

Nous éprouvons aussi beaucoup de gratitude vis-à-vis de M. DUBREIL qui a bien voulu, pour cette deuxième thèse, remplacer M. JANET souffrant. Il nous a conseillé de mettre l'accent sur le caractère partiellement ordonné de nos graphes ce qui a donné son unité à cette étude, qu'il s'agisse de graphes de théories ou de graphes de théorèmes.

Nous nous sommes efforcés de mettre en évidence, malgré la nouveauté et la difficulté du sujet, quelques éléments invariants de ces graphes. Nous souhaitons qu'on puisse, par la suite, codifier suffisamment leur construction pour qu'ils deviennent un outil vraiment scientifique entre les mains des mathématiciens.

A N N E X E

Liste des lemmes du mémoire de M. Van der Corput

INTRODUCTION: Il existe une constante positive  $\tau$  telle que le produit

$$n^{\tau} \left\{ n \log \left( 1 + \frac{1}{n} \right) - 1 \right\} \text{ est borné pour tous les } n \text{ p. 2}$$

FONCTION DE MOEBIUS  $\mu(m)$   $m$  entier  $> 0$  p. 3

Définition:  $\mu(1) = 1$

$\mu(m) = 0$  si  $m$  contient dans sa décomposition en facteurs premiers au moins un nombre premier à un exposant supérieur ou égal à 2.

$\mu(m) = 1$  Si  $m$  contient un nombre pair de facteurs premiers tous différents.

$\mu(m) = -1$  si  $m$  contient un nombre impair de facteurs premiers tous différents:

Exemples:

$$\begin{array}{ccccccccc} \mu(1) = 1 & \mu(2) = -1 & \mu(3) = -1 & \mu(4) = 0 & \mu(5) = -1 & & & & \\ \mu(6) = 1 & \mu(7) = -1 & \mu(8) = 0 & \mu(9) = 0 & \mu(10) = +1 & & & & \\ \mu(11) = -1 & \mu(12) = 0 & \mu(13) = -1 & \mu(14) = 1 & \mu(15) = 1 & & & & \end{array}$$

LEMME 1 : Pour chaque entier  $h > 0$  la fonction p.4

$$\varphi_h(m) = \sum_{d|m} (d) \log^h d = 0 \quad \text{si le nombre naturel } m \text{ contient plus de } h \text{ facteurs premiers différents.}$$

$\sum_{d|m}$  indique que la somme est étendue à tous les diviseurs de  $m$ , les diviseurs 1 et  $m$  inclus.

$$\text{En particulier } \sum_{d|m} \mu(d) = 0 \quad \text{pour } h > 1$$

pour  $h = 0$

$$\sum_{d|m} \mu(d) = 1 \quad \text{pour } m = 1$$

Le lemme ne servira que pour  $h = 0, h = 1, h = 2$ .

LEMME 2 :  $f(m) = \sum_{d|m} \mu(d) \log^2 \frac{x}{d} = 0$   $x > 0$   
 si  $m$  contient plus  
 de 2 facteurs premiers différents. p.5

$$f(1) = \log^2 x$$

$$f(p^\alpha) = -\log^2 p + 2 \log x \log p \quad (p \text{ premier } \alpha \geq 1)$$

$$f(p^\alpha q^\beta) = 2 \log p \log q \quad (p \text{ et } q \text{ premières différentes } \alpha \geq 1 \quad \beta \geq 1)$$

LEMME 3<sub>I</sub> : THEOREME DE TCHEBYCHEFF (1851-1852) p.6

$$\text{Pour chaque nombre } x > 1 \quad \frac{\vartheta(x)}{x} < 4 \log 2$$

LEMME 3<sub>II</sub> Pour  $x > 2 \quad \frac{\vartheta(x)}{x} > \frac{1}{4} \log 2$  p.7

LEMME 3<sub>III</sub>  $\frac{1}{\log x} \sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p} \longrightarrow 1$   
 $x \longrightarrow \infty$  p.9

LEMME 4  $\frac{1}{x \log x} \sum_{p \leq x} \log p \log \frac{x}{p} \longrightarrow 0$   
 $x \longrightarrow \infty$  p.10

LEMME 5  $\frac{1}{x \log x} \sum_{p^\alpha \leq x} \log p \longrightarrow 0$   
 $x \longrightarrow \infty$  p.10

LEMME 6  $\sum_{m \leq x} \sum_{d|m} \mu(d) \log^2 \frac{x}{d} = \log x \vartheta(x) + 2 \sum_{p \leq \sqrt{x}} \vartheta\left(\frac{x}{p}\right) \log p$   
 $+ o(x \log x)$  p.11

Remarque : Le terme  $o(x \log x)$  désigne une fonction de  $x$  qui, divisée par  $x \log x$ , tend vers zéro si  $x \longrightarrow \infty$

LEMME 7  $\left| \sum_{d=1}^x \frac{\mu(d)}{d} \right| < 1$  pour tout nombre naturel  $x$  p. 13

LEMME 8 Il existe une constante  $C_1$  (constante d'Euler) telle que p.14

$$1) \quad \varepsilon(y) = \sum_{n \leq y} \frac{1}{n} - \log y - C_1 \longrightarrow 0$$

$$y \longrightarrow \infty$$

de manière assez rapide pour que  $\varepsilon(y) \log y \longrightarrow 0$   
 $y \longrightarrow \infty$

$$2) \sum_{n \leq y} \frac{\log n}{n} - \frac{1}{2} \log^2 y \longrightarrow \text{limite finie} \\ y \longrightarrow \infty$$

LEMME 9 Si  $\tau(n)$  = nombre, des diviseurs de  $n$  p.16

$$\sum_{n \leq y} \frac{\tau(n)}{n} = \frac{1}{2} \log^2 y + C_3 \log y + C_4 + O(1)$$

$C_3, C_4$  constantes convenablement choisies  $O(1)$  désigne une fonction de  $y$  qui tend vers 0 si  $y$  croît indéfiniment.

$$\text{LEMME 10} \quad \sum_{d \leq x} \frac{\mu(d)}{d} \log \frac{x}{d} = O(\log x) \quad \text{p.18}$$

$$\text{LEMME 11} \quad \sum_{d|K} \mu(d) \tau\left(\frac{K}{d}\right) = 1 \quad \text{pour chaque nombre naturel } K \quad \text{p.19}$$

$$\text{LEMME 12} \quad \sum_{d \leq x} \frac{\mu(d)}{d} \log^2 \frac{x}{d} = 2 \log x + O(\log x) \quad \text{p.19}$$

# FORMULE DE SELBERG

p.20

$$\left[ \frac{\partial(x)}{x} + \frac{2}{x \log x} \sum_{p \leq \sqrt{x}} \partial\left(\frac{x}{p}\right) \log p \right] \xrightarrow{x \longrightarrow \infty} 2$$

$$A = \limsup_{x \longrightarrow \infty} \frac{\partial(x)}{x} \quad a = \liminf_{x \longrightarrow \infty} \frac{\partial(x)}{x}$$

$$\text{LEMME 13} \quad A + a = 2 \quad \text{p.23}$$

$$\text{LEMME 14} \quad \text{Pour chaque nombre fixe } \lambda > a \text{ on a} \quad \text{p.24}$$

$$\frac{1}{\log x} \sum_1 \frac{\log p}{p} \longrightarrow 0 \quad \sum_1 \text{ étendu à } p \leq x \\ \text{tel que } \partial\left(\frac{x}{p}\right) > \frac{\lambda x}{p}$$

$$\text{LEMME 15} \quad \text{Pour tout nombre fixe } \mu < A \quad \text{p.25}$$

$$\frac{1}{\log^2 x} \sum_2 \frac{\log p}{p} \frac{\log q}{q} \longrightarrow 0 \quad \sum_2 \text{ étendu aux paires de nombres } p \text{ et } q$$

figurant dans la suite  $p_1 p_2 \dots$  tels que

$$p \leq \sqrt{x} \quad q \leq \sqrt{\frac{x}{p}} \quad \partial\left(\frac{x}{pq}\right) < \frac{\mu x}{pq}$$

$$\frac{\partial(x)}{x} \xrightarrow{x \longrightarrow \infty} 1$$

p.28







